

5. FOLGE, 1942, BAND 42, HEFT 7/8 (SCHLUSSHEFT)

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren und fort-
geführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,
G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

Der ganzen Reihe 434. Band

Kuratorium:

W. Gerlach F. Paschen M. Planck
R. W. Pohl A. Sommerfeld

Unter Mitwirkung
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.
M. PLANCK, Berlin

Mit 39 Abbildungen im Text



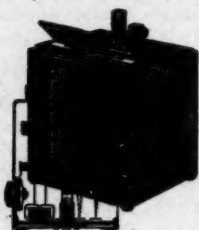
LEIPZIG / VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Redaktionsschluß am 13. Mai 1943

Inhalt

	Seite
Th. Neugebauer-Budapest, Berechnung der Lichtzerstreuung von Fadenkettenlösungen. (Mit 1 Abbildung)	509
Wilhelm Bartholomeyczek-Greifswald, Über die Aufsehrung von Edelgasen in Hohlkathoden und die damit verbundenen Vorgänge. (Mit 15 Abbildungen)	534
Fritz Wecker-Heidelberg, Röntgenographische Strukturuntersuchung an Zinksulfid-Kupfer-Phosphoren nach der Pulvermethode. (Mit 7 Abbildungen)	561
Fritz Bopp-Breslau, Lineare Theorie des Elektrons. II. (Mit 2 Abbildungen)	573
Wilhelm Müller-München, Zur Berechnung der Kräfte an zylindrischen Leitern in ebenen elektrostatischen und elektromagnetischen Feldern. (Mit 14 Abbildungen)	609
Namenregister zu Band 41—42	634

Multiflex-Galvanometer



Das neue Universalinstrument für die Messung und Registrierung kleiner Ströme ab 5×10^{-12} A

Verlangen Sie unsere Druckschriften

Spezialfabrik Hochelektrischer Zellen und Apparate

DR. B. LANGE

BERLIN - Telegrammadresse: Photoselle Berlin



DR. CARL LEISS · BERLIN

Physikalisch-optische Instrumente

Spiegel-Doppel-Monochromatoren mit Quarz-, Steinsalz- und Flintprismen

Monochromatoren für das sichtbare, ultraviolette und ultrarote Gebiet. Spektralapparate, Spektrometer, Spektrographen mit Glas-, Quarz- und Fluorit-Optik

Röntgen-Spektrographen und Röhren nach Prof. M. Siegbahn
Linsen und Prismen aus Glas, Quarz, Quarzglas und Fluorit usw.

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE • BAND 42 • HEFT 7 u. 8 • 1942/43

Berechnung der Lichtzerstreuung von Fadenkettenlösungen

Von Th. Neugebauer

(Mit 1 Abbildung)

Die Methode der Messung der Depolarisation des gestreuten Lichtes zur Erforschung der Molekülstruktur ist bei Fadenketten unbrauchbar, weil die Anisotropie von diesen mit zunehmender Kettengliederzahl sich kaum ändert; dagegen ändert sich aber die Intensität des gestreuten Lichtes, aus der man dem Gang der Polymerisation oder Depolymerisation im Ablaufe folgen kann, die dazu benötigten Formeln (58), (59) und (61) werden hergeleitet. Gleichzeitig wird eine Methode angegeben, mit Hilfe deren man die Frage entscheiden kann, ob die Fadenketten gerade, verbogen oder geknäuelt sind, und außerdem, wie man die Dichte- und Orientierungsstreuung des Lösungsmittels von der Streuung der Fadenketten trennen kann (§ 4). Der in dieser Arbeit erhaltene „diffusometrische“ Mittelwert des Polymerisationsgrades ist mit dem Staudingerschen „viskosimetrischen“ identisch. Für den Fall, daß die Kettenlänge nicht mehr klein im Verhältnis zur Wellenlänge des Lichtes ist, werden ebenfalls Formeln (92), (93) und (94) hergeleitet (§ 5), mit Hilfe deren man noch ein Verfahren zur Entscheidung der Frage, ob die Ketten gerade sind, erhält. Besitzen die Ketten ein starkes Assoziationsbestreben, so werden unsere Formeln ungültig, das ist das Gebiet des Plotnikoweffektes.

Bekannterweise kann man aus dem Depolarisationsgrad des gestreuten Lichtes wichtige Schlüsse auf die molekulare Struktur der streuenden Moleküle ziehen. Dieses Verfahren wurde besonders von Stuart¹⁾ und seinen Mitarbeitern zu einer sehr fruchtbaren Forschungsmethode ausgearbeitet. Die Messung der absoluten Größe der gestreuten Lichtintensität ist dagegen bezüglich der erwähnten Fragen uninteressant, weil man ja zur Ermittlung des Depolarisationsgrades immer nur das Verhältnis von zwei Intensitäten zu messen braucht.

Auf die Kettenlänge bei Polymerhomologen kann man dagegen aus der Messung des Depolarisationsgrades keine Schlüsse ziehen, weil die volle Anisotropie schon meistens bei kleinen Kettenlängen erreicht ist, wie man ja das auch theoretisch erwartet. Die experi-

1) Vgl. z. B. H. A. Stuart, Molekülstruktur. Berlin J. Springer 1934; VI. Kapitel u. H. A. Stuart u. H. G. Trieschmann, Lichtzerstreuung. (Hand- und Jahrbuch der chemischen Physik. Bd. 8, Abschn. II.) Leipzig. Akademische Verlagsgesellschaft 1936.

mentelle Richtigkeit dieser Tatsache bei der Reihe der normalen Paraffine folgt aus einer Zusammenstellung der gemessenen Depolarisationsgrade von Stuart¹⁾. Andererseits muß aber mit zunehmender Kettenlänge die absolute Größe der gestreuten Lichtintensität ebenfalls zunehmen, weil ja die einzelnen Glieder einer Kette zueinander kohärent streuen. Selbstverständlich kann man darum nicht aus der Messung der Lichtintensität die Kettenlängen berechnen, weil ja die Streuintensität zur Gesamtmasse der streuenden Substanz und zur Intensität des Primärlichtes proportional ist und außerdem auch die von dem Lösungsmittel gestreute Lichtintensität enthält. Wurde aber der Polymerisationsgrad bzw. der Mittelwert desselben für die fragliche Substanz nach irgendeiner Methode bestimmt, dann kann man dem Gang der Polymerisation oder Depolymerisation mit Hilfe der Beobachtung der Änderung der gestreuten Lichtintensität im Ablaufe folgen. Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Theorie dieser Methode auszuarbeiten.

Rayleigh wies als erster darauf hin, daß kugelförmige Teilchen ohne Depolarisation streuen, nichtkugelförmige, dagegen eine endliche Depolarisation verursachen. Mie²⁾ entwickelte die Theorie der Lichtzerstreuung von größeren dielektrischen und leitenden kugelförmigen Teilchen und Gans³⁾ erweiterte diese Untersuchungen auf ellipsoidale Teilchen die klein im Verhältnis zur Wellenlänge des einfallenden Lichtes sind. Beide Forscher gingen von der Kontinuums- theorie aus, in unserem Falle handelt es sich jedoch um Fadenketten, also um extrem anisodiametrale Teilchen, die meistens eine Dicke von einem oder von nur wenigen Atomdurchmessern besitzen. Es ist deshalb viel zweckmäßiger und richtiger zu versuchen, gleich von der korpuskularen Theorie auszugehen, statt die erwähnten Formeln auf unseren Fall zu spezialisieren.

§ 1. Bezeichnen wir die drei Hauptpolarisierbarkeiten des wiederholbaren Schrittes bei der Polymerisation in einem an das Teilchen gebundenen Koordinatensystem, das wir gleich so annehmen, daß das Polarisationsellipsoid auf Hauptachsen transformiert sein soll, mit b_1 , b_2 und b_3 . Diese Größen sollen außerdem nicht die Polarisierbarkeiten des frei gedachten Doppelradikals bedeuten, sondern dieselben innerhalb der Kette, also schon unter Berücksichtigung der Silbersteinschen und der quantenmechanischen

1) Vgl. H. A. Stuart u. H. G. Trieschmann, a. a. O. S. 36.

2) G. Mie, Ann. d. Phys. [5] 25. S. 377. 1908.

3) E. Gans, Ann. d. Phys. [5] 37. S. 881. 1912; 47. S. 270. 1915; 62. S. 331. 1920; vgl. auch F. Möglich, Ann. d. Phys. [5] 83. S. 609. 1927.

Wechselwirkung¹⁾ mit den Nachbarn. Für die Hauptpolarisierbarkeiten der ganzen Kette haben wir dann, wenn wir den Polymerisationsgrad mit P bezeichnen

$$(1) \quad (P+1)b_1, \quad (P+1)b_2 \quad \text{und} \quad (P+1)b_3.$$

Dabei haben wir angenommen, daß die Kette gerade ist, auf diese Frage kommen wir später noch zurück. In (1) haben wir außerdem vernachlässigt, daß an den Enden der Ketten die Polarisierbarkeiten streng genommen etwas verschieden sein müßten; abgesehen von sehr kurzen Ketten wird jedoch diese Vereinfachung erlaubt sein. Die Polarisierbarkeiten des Grundmoleküls werden jedoch von b_1, b_2 und b_3 verschieden sein; in vielen Fällen wird jedoch auch dieser Unterschied nicht groß sein, so daß wir in erster Näherung dieselben Polarisierbarkeiten für das einfache Molekül benutzen können.

Den elektrischen Vektor \mathcal{E}_{0z} des einfallenden Lichtes, der auch das in der Lösung auftretende Lorentzsche innere Feld enthält, (ist nämlich \mathcal{E}_{0z} der Vektor im Vakuum, so haben wir $\mathcal{E}_{0z} = \frac{2+\epsilon}{3} \mathcal{E}_{0z}$, wo ϵ die Dielektrizitätskonstante der Lösung bedeutet) nehmen wir parallel zur raumfesten Z -Achse an; bekannterweise folgt dann für

Tabelle 1

	X	Y	Z
\bar{X}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}
\bar{Y}	φ_{21}	φ_{22}	φ_{23}
\bar{Z}	φ_{31}	φ_{32}	φ_{33}

die von diesem Vektor in unserer Fadenkette parallel zur raumfesten Z - und X -Achse induzierten Momente, wenn wir die Richtungskosinus zwischen den Achsen des raumfesten und teilchenfesten (überstrichene Koordinaten) Koordinatensystems nach der Tab. 1 einführen.

$$(2) \quad \mu_z = (P+1)(b_1 \varphi_{13}^2 + b_2 \varphi_{23}^2 + b_3 \varphi_{33}^2) \mathcal{E}_{0z}$$

und

$$(3) \quad \mu_x = (P+1)(b_1 \varphi_{13} \varphi_{11} + b_2 \varphi_{23} \varphi_{21} + b_3 \varphi_{33} \varphi_{31}) \mathcal{E}_{0z}$$

und weiter für die gestreuten Lichtintensitäten, deren elektrische Vektoren parallel und senkrecht zu dem elektrischen Vektor des

1) Vgl. Th. Neugebauer, Ztschr. f. Phys. 102. S. 305. 1936; Ann. d. Phys. [5] 31. S. 540. 1938; 39. S. 241. 1941.

Primärstrahlen orientiert sind, wenn wir auch noch über alle Orientierungen der Fadenkette im Verhältnis zum raumfesten Koordinatensystem und über die Zeit mitteln

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} I'_z \text{ prop } N \overline{\mu_z^2} &= N(P+1)^2 \left\{ \overline{b_1^2 \varphi_{13}^4} + \overline{b_2^2 \varphi_{23}^4} + \overline{b_3^2 \varphi_{33}^4} \right. \\ &\quad \left. + 2(\overline{b_1 b_2 \varphi_{13}^2 \varphi_{23}^2} + \overline{b_2 b_3 \varphi_{23}^2 \varphi_{33}^2} + \overline{b_3 b_1 \varphi_{33}^2 \varphi_{13}^2}) \right\} \overline{\mathfrak{E}_{0z}^2} \end{aligned} \right.$$

und

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} I'_x \text{ prop } N \overline{\mu_x^2} &= N(P+1)^2 \left\{ \overline{b_1^2 \varphi_{13}^2 \varphi_{11}^2} + \overline{b_2^2 \varphi_{23}^2 \varphi_{21}^2} + \overline{b_3^2 \varphi_{33}^2 \varphi_{31}^2} \right. \\ &\quad \left. + 2(\overline{b_1 b_2 \varphi_{13} \varphi_{11} \varphi_{23} \varphi_{21}} + \overline{b_2 b_3 \varphi_{23} \varphi_{21} \varphi_{33} \varphi_{31}} \right. \\ &\quad \left. + \overline{b_3 b_1 \varphi_{33} \varphi_{31} \varphi_{13} \varphi_{11}}) \right\} \overline{\mathfrak{E}_{0x}^2}, \end{aligned} \right.$$

wo N die Zahl der Moleküle vom Polymerisationsgrad P in der Volumeneinheit bedeutet.

Setzen wir jetzt die bekannten Mittelwerte¹⁾

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\varphi_{hk}^2} &= \frac{1}{3}, \quad \overline{\varphi_{hk}^4} = \frac{1}{5}, \quad \overline{\varphi_{hk}^2 \varphi_{hk}^2} = \frac{1}{15}, \quad \overline{\varphi_{hk}^2 \varphi_{kl}^2} = \frac{2}{15} \\ \text{und} \quad \overline{\varphi_{hk} \varphi_{kl} \varphi_{ik} \varphi_{il}} &= -\frac{1}{30} \end{aligned} \right.$$

in (4) und (5) ein, so folgt

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} I'_z \text{ prop } N(P+1)^2 \cdot \left\{ \frac{1}{5} (\overline{b_1^2} + \overline{b_2^2} + \overline{b_3^2}) + \frac{2}{15} (\overline{b_1 b_2} + \overline{b_2 b_3} + \overline{b_3 b_1}) \right\} \overline{\mathfrak{E}_{0z}^2} \end{aligned} \right.$$

und

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} I'_x \text{ prop } N(P+1)^2 \frac{1}{15} \cdot \left\{ \overline{b_1^2} + \overline{b_2^2} + \overline{b_3^2} - (\overline{b_1 b_2} + \overline{b_2 b_3} + \overline{b_3 b_1}) \right\} \overline{\mathfrak{E}_{0x}^2}, \end{aligned} \right.$$

also die bekannten Resultate bloß multipliziert mit dem Quadrat des Polymerisationsgrades.

Weiter erhalten wir aus (7) und (8) für die in der Theorie der molekularen Lichtdiffusion benützten Größen \mathcal{A} , \mathcal{A} und δ^2

$$(9) \quad \mathcal{A} = \frac{I'_z}{I_z} = \frac{\overline{b_1^2} + \overline{b_2^2} + \overline{b_3^2} - \overline{b_1 b_2} - \overline{b_2 b_3} - \overline{b_3 b_1}}{3(\overline{b_1^2} + \overline{b_2^2} + \overline{b_3^2}) + 2(\overline{b_1 b_2} + \overline{b_2 b_3} + \overline{b_3 b_1})},$$

$$(10) \quad \mathcal{A} = \frac{I_z}{I'_z} = \frac{2I'_z}{I'_z + I'_x} = \frac{2(\overline{b_1^2} + \overline{b_2^2} + \overline{b_3^2} - \overline{b_1 b_2} - \overline{b_2 b_3} - \overline{b_3 b_1})}{4(\overline{b_1^2} + \overline{b_2^2} + \overline{b_3^2}) + \overline{b_1 b_2} + \overline{b_2 b_3} + \overline{b_3 b_1}}$$

und

$$(11) \quad \delta^2 = \frac{10\mathcal{A}}{6-7\mathcal{A}} = \frac{(\overline{b_1} - \overline{b_2})^2 + (\overline{b_2} - \overline{b_3})^2 + (\overline{b_3} - \overline{b_1})^2}{(\overline{b_1} + \overline{b_2} + \overline{b_3})^2}.$$

1) Z. B. J. Cabannes, La diffusion moléculaire de la lumière. Les presses univ. de France. Paris 1929. S. 29 u. 34.

Bei allen diesen Formeln ist P herausgefallen: (9), (10) und (11) sind also unabhängig von dem Polymerisationsgrad. Bezüglich der Depolarisation des gestreuten Lichtes, verhalten sich die Fadenketten also ganz so, wie wenn der wiederholbare Schritt derselben allein vorhanden wäre. Vernachlässigen wir außerdem noch den meistens kleinen Unterschied zwischen den Polarisierbarkeiten des wiederholbaren Schrittes und des Grundmoleküles bzw. des letzten Gliedes an den Enden der Fadenketten, so können wir sagen, daß der Depolarisationsgrad des gestreuten Lichtes vom Grade der Polymerisation ganz unbeeinflusst bleibt. Die in der Einleitung erwähnte Zusammenstellung der Depolarisationsgrade bei der Reihe der gesättigten normalen Kohlenwasserstoffe von Stuart zeigt, daß das auch tatsächlich so ist, die kleinen Unterschiede in der Depolarisation der einzelnen Glieder rühren eben von der erwähnten Vernachlässigung her und verschwinden mit zunehmender Gliederzahl immer mehr.

Unsere bisherigen Berechnungen sind alle klassisch. In Zusammenhang mit einem anderen Problem wurde jedoch vom Verf.¹⁾ gezeigt, daß solche Berechnungen auch nach der Quantenmechanik auf dasselbe Resultat führen. Nur werden dann die Mittelwerte (6) nicht aus einer Integration über die Eulerschen Winkel gewonnen, sondern aus einer Summierung über die magnetischen Quantenzahlen, liefern aber ebenfalls (6). Außerdem erhält man die Polarisierbarkeiten ausgedrückt mit Hilfe der Eigenfrequenzen, Frequenz des Lichtes und Übergangswahrscheinlichkeiten. Neue Gesichtspunkte liefert dagegen die quantenmechanische Berechnung bei der Berücksichtigung der angeregten Oszillationsniveaus. Da jedoch diese Fragen bezüglich des in dieser Arbeit behandelten Problems uninteressant sind, so wollen wir nicht darauf eingehen.

In (7) und (8) führen wir jetzt einen Proportionalitätsfaktor C ein, damit wir diese Zusammenhänge in Form einer Gleichung schreiben können; also erhalten wir

$$(12) I'_z = CN(P+1)^2 \left\{ \frac{1}{5} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + \frac{2}{15} (b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1) \right\}$$

und eine analoge Gleichung für I'_x .

Wie aber zuerst Staudinger gezeigt hat, bestehen die künstlich durch Polymerisation oder Depolymerisation erhaltenen Stoffe nicht aus lauter Molekülen einheitlichen Polymerisationsgrades, sondern sind immer ein Gemisch von Polymerhomologen. Wir müssen also in diesem Falle statt (12)

1) Th. Neugebauer, Ztschr. f. Phys. 119. S. 114. 1942.

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} I'_s &= C[N_1(P_1 + 1)^2 + N_2(P_2 + 1)^2 + \dots] \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{5}(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + \frac{2}{15}(b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1) \right\} \end{aligned} \right.$$

schreiben, zu dem als Nebenbedingung noch

$$(14) \quad N_0 = N_1(P_1 + 1) + N_2(P_2 + 1) + \dots$$

hinzukommt, wo N_0 die Zahl der Grundmoleküle in der Volumeneinheit bedeutet.

Die eckige Klammer in (13) würde ihr Maximum erreichen, wenn

$$P_1 + 1 = N_0, \quad N_1 = 1 \quad \text{und} \quad N_2 = N_3 = \dots = 0$$

wäre, also die ganze Materie zu einem Riesenmolekül polymerisiert sein würde. Dieser Fall wäre bei der Entstehung eines zusammenhängenden Kristallgitters verwirklicht, dann könnten wir aber selbstverständlich nicht mehr annehmen, daß dasselbe klein ist im Verhältnis zur Wellenlänge des Lichtes. Sein Minimum erreicht (14) dagegen, wenn

$$N_1 = N_0, \quad P_1 = 0 \quad \text{und} \quad N_2 = N_3 = \dots = 0$$

ist, der fragliche Stoff also überhaupt nicht polymerisiert ist. Auf diesen Fall bezieht sich aber selbstverständlich wieder die obige Bemerkung, daß die Polarisierbarkeiten des Grundmoleküls und des wiederholbaren Schrittes nicht genau übereinstimmen.

Wir sehen also, daß mit zunehmendem Polymerisationsgrad die eckige Klammer in (13) und demzufolge auch I'_s und I'_z ebenfalls zunehmen. Der denkbar einfachste Fall wäre der, wenn nur Grundmoleküle und außerdem Moleküle eines einheitlichen Polymerisationsgrades P vorhanden wären, dieser Fall kommt jedoch nur bei Naturstoffen vor. Für die eckige Klammer in (13) hätten wir dann

$$(15) \quad [N_1 + N_2(P + 1)^2]$$

und für (14)

$$(16) \quad N_0 = N_1 + N_2(P + 1).$$

Setzen wir (16) in (15) ein, so folgt für diese Größe

$$(17) \quad [N_0 + \{(P + 1)^2 - (P + 1)\} N_2].$$

Setzen wir jetzt (13) und die analoge Gleichung

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} I'_s &= C[N_1(P_1 + 1)^2 + N_2(P_2 + 1)^2 + \dots] \\ &\cdot \frac{1}{15} \{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_1 b_2 - b_2 b_3 - b_3 b_1\} \end{aligned} \right.$$

in (9), (10) und (11) ein, so fallen wieder alle Polymerisationsgrade und auch die Verteilung der Moleküle über dieselben heraus, so daß wir wieder dieselben rechten Seiten erhalten.

Wir sehen also, daß die Depolarisation des gestreuten Lichtes und demzufolge auch die Anisotropie vom Polymerisationsgrad auch im allgemeinsten Falle eines Gemisches von einer Reihe von polymerhomologen Molekülen ganz unbeeinflusst bleibt. Die absolute Größe der gestreuten Lichtintensität nimmt dagegen mit zunehmendem Polymerisationsgrad monoton zu. Wie also bei der Strukturbestimmung der Moleküle eben die Messung des Depolarisationsgrades das Ausschlaggebende ist und die Kenntnis der absoluten Intensität des gestreuten Lichtes uninteressant bleibt, so ist in unserem Problem gerade umgekehrt allein die Kenntnis der Intensität das Wichtige.

§ 2. Es wäre jedoch ganz unmöglich, einfach aus einer Messung der Intensität des gestreuten Lichtes den augenblicklichen Polymerisationsgrad berechnen zu wollen, weil ja erstens auch das Lösungsmittel Licht streut und zweitens die Intensität des Primärlichtes und das von dem durchstrahlte Volumen der fraglichen Substanz als Faktoren auftreten würden. Ist aber der Ausgangspolymerisationsgrad nach irgendeiner Methode ermittelt worden, so kann man nach dem hier besprochenen Verfahren aus der Änderung der Streuintensität auf den Prozeß der Polymerisation oder Depolymerisation schließen. Um den für die Beobachtung günstigsten Fall finden zu können, wollen wir jetzt den allgemeinsten Fall, d. h. die Lichtzerstreuung eines Fadenkettenmoleküls in einer willkürlichen Richtung berechnen.

Bezeichnen wir mit M das induzierte elektrische Moment, dann folgt bekannterweise für die in einer Entfernung r auftretende elektrische und magnetische Feldintensität

$$(19) \quad \frac{1}{rc^2} \frac{d^2}{dt^2} |M \sin \vartheta| = E(r) = H(r),$$

wo ϑ den Winkel bedeutet, den die Richtung von r und die Dipolachse miteinander einschließen. Für die gestreute Lichtintensität erhalten wir dann mit Hilfe des Poyntingschen Vektors

$$(20) \quad J = \bar{\mathcal{E}} = \frac{c}{4\pi} [\mathcal{E}, \mathcal{H}].$$

Bezeichnen wir die Richtungskosinus, welche die willkürliche Beobachtungsrichtung mit den Achsen des molekülfesten Koordinatensystems einschließt, mit $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$; außerdem nehmen wir in einer zu dieser Richtung senkrechten Ebene zwei aufeinander senkrecht stehende Richtungen an, deren Richtungskosinus wir mit

$$\alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \quad \text{und} \quad \alpha_3 \beta_3 \gamma_3$$

bezeichnen.

$$\mathcal{E}_{0z} = E_0 \cos 2\pi \nu t$$

sei außerdem der elektrische Vektor des Primärlichtes, den wir parallel zur raumfesten Z-Achse annehmen. Mit Hilfe der in unserer Tab. 1 angegebenen Richtungskosinus folgt dann für die entlang der erwähnten zwei Richtungen in unserem Fadenkettenmolekül induzierten Momente

$$(21) \quad M(\alpha_2 \beta_2 \gamma_2) = (P+1) \{ \alpha_2 \varphi_{13} b_1 + \beta_2 \varphi_{23} b_2 + \gamma_2 \varphi_{33} b_3 \} \mathcal{E}_{0z}$$

und

$$(22) \quad M(\alpha_3 \beta_3 \gamma_3) = (P+1) \{ \alpha_3 \varphi_{13} b_1 + \beta_3 \varphi_{23} b_2 + \gamma_3 \varphi_{33} b_3 \} \mathcal{E}_{0z}$$

und weiter

$$(23) \quad E(\alpha_2 \beta_2 \gamma_2) = H(\alpha_2 \beta_2 \gamma_2) = \frac{1}{rc^2} \dot{M}(\alpha_2 \beta_2 \gamma_2)$$

und

$$(24) \quad E(\alpha_3 \beta_3 \gamma_3) = H(\alpha_3 \beta_3 \gamma_3) = \frac{1}{rc^2} \dot{M}(\alpha_3 \beta_3 \gamma_3).$$

Diese Werte setzen wir jetzt in (20) ein:

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} J = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{r^2 c^2} (P+1)^2 [& (\alpha_2 \varphi_{13} b_1 + \beta_2 \varphi_{23} b_2 + \gamma_2 \varphi_{33} b_3)^2 \\ & + (\alpha_3 \varphi_{13} b_1 + \beta_3 \varphi_{23} b_2 + \gamma_3 \varphi_{33} b_3)^2] \overline{\mathcal{E}_{0z}^2} \end{aligned} \right.$$

Berücksichtigen wir noch die Relationen

$$(26) \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = 0$$

und die weiteren vier analogen, so folgt

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} J = \frac{1}{4\pi r^2 c^2} (P+1)^2 \{ & (1-\alpha_1^2) \varphi_{13}^2 b_1^2 + (1-\beta_1^2) \varphi_{23}^2 b_2^2 + (1-\gamma_1^2) \varphi_{33}^2 b_3^2 \\ & - 2[\alpha_1 \beta_1 \varphi_{13} \varphi_{23} b_1 b_2 + \beta_1 \gamma_1 \varphi_{23} \varphi_{33} b_2 b_3 + \gamma_1 \alpha_1 \varphi_{33} \varphi_{13} b_3 b_1] \} \overline{\mathcal{E}_{0z}^2} \end{aligned} \right.$$

Wir sehen also, daß nur $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ d. h. die Richtungskosinus der Beobachtungsrichtung stehen geblieben sind, $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ und $\alpha_3 \beta_3 \gamma_3$ sind dagegen herausgefallen, wie ja das auch zu erwarten war.

Würde es sich einfach um ein kugelsymmetrisches Molekül handeln, dessen Polarisierbarkeit wir mit a bezeichnen, so würde aus (27)

$$(28) \quad J = \frac{a^2}{4\pi r^2 c^2} \{ 1 - (\alpha_1 \varphi_{13} + \beta_1 \varphi_{23} + \gamma_1 \varphi_{33})^2 \} \overline{\mathcal{E}_{0z}^2}$$

folgen. In der runden Klammer steht der Kosinus des Winkels den wir schon früher mit ϑ bezeichnet haben. Berücksichtigen wir noch, daß

$$(29) \quad \overline{\mathcal{E}_{0z}^2} = 8\pi^4 \nu^4 E_0^2$$

ist, so folgt für (28)

$$(30) \quad J = \frac{a^2}{r^2 c^2} 2\pi^2 \nu^4 E_0^2 \sin^2 \vartheta,$$

also das aus der elementaren Theorie bekannte Resultat.

Kehren wir jetzt wieder zur Formel (27) zurück, in die wir (29) einsetzen und dann nach einer weiteren kleinen Umformung

$$(31) \quad \left\{ J = \frac{2\pi^2 \nu^4}{r^2 c^3} E_0^2 (P + 1)^2 \cdot \{ \varphi_{13}^2 b_1^2 + \varphi_{23}^2 b_2^2 + \varphi_{33}^2 b_3^2 - (\alpha_1 \varphi_{13} b_1 + \beta_1 \varphi_{23} b_2 + \gamma_1 \varphi_{33} b_3)^2 \} \right.$$

erhalten. Das ist also die von einem Fadenkettenmolekül gestreute Lichtintensität. Zur praktischen Anwendung müssen wir (31) noch über alle möglichen Orientierungen mitteln und dann mit der Zahl der streuenden Moleküle multiplizieren. Diese Aufgabe vereinfacht sich z. B. sehr, wenn wir die willkürliche Beobachtungsrichtung senkrecht zum elektrischen Vektor der einfallenden Lichtwelle und ebenfalls senkrecht zur Primärstrahlrichtung wählen. Wir haben dann

$$(32) \quad \alpha_1 = \varphi_{12}, \quad \beta_1 = \varphi_{23} \quad \text{und} \quad \gamma_1 = \varphi_{32}.$$

Für den Mittelwert der geschweiften Klammer in (31) den wir mit \bar{K} bezeichnen, folgt dann mit Hilfe von (6)

$$(33) \quad \bar{K} = \frac{4}{15} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + \frac{1}{15} (b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1),$$

also die Summe der in (7) und (8) stehenden Klammerausdrücke, wie ja das auch sein muß, weil wir in (25) beide aufeinander senkrechten Polarisationsrichtungen berücksichtigt haben. Interessiert uns dagegen die gestreute Lichtintensität deren elektrischer Vektor parallel bzw. senkrecht zu dem elektrischen Vektor des Primärlichtes schwingt, so haben wir nur das erste bzw. zweite Glied in (25) zu berücksichtigen und müssen

$$(34) \quad \alpha_2 = \varphi_{13}, \quad \beta_2 = \varphi_{23}, \quad \gamma_2 = \varphi_{33},$$

bzw.

$$(35) \quad \alpha_3 = \varphi_{11}, \quad \beta_3 = \varphi_{21}, \quad \gamma_3 = \varphi_{31}$$

setzen. Nach Durchführung der Mittelung erhält man dann aus dem ersten Gliede von (25) den Klammerausdruck von (7) und aus dem zweiten Gliede den von (8), wie ja das auch sein muß.

Für das in dieser Arbeit behandelte Problem ist dagegen der Fall sehr wichtig, in dem das gestreute Licht parallel zur Richtung des elektrischen Vektors des Primärstrahles beobachtet wird, worauf wir noch zurückkommen werden. Wir haben dann

$$(36) \quad \alpha_1 = \varphi_{13}, \quad \beta_1 = \varphi_{23}, \quad \gamma_1 = \varphi_{33}$$

und daraus folgt nach der Mittelung

$$(37) \quad \left\{ I_{\perp} = \frac{2\pi^2 \nu^4}{r^2 c^3} E_0^2 (P + 1)^2 N \cdot \left\{ \frac{2}{15} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - \frac{2}{15} (b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1) \right\} \right.$$

N bedeutet dabei die Zahl der streuenden Fadenkettenmoleküle. Der Klammerausdruck ist jetzt der zweifache von (8) wie ja das auch anschaulich folgt. In allen in Rede kommenden Fällen wird es sich selbstverständlich nicht um Moleküle eines einheitlichen Polymerisationsgrades handeln, sondern um ein Gemisch von Polymerhomologen, so daß wir statt $N(P+1)^2$

$$(38) \quad \overline{N(P+1)^2} = N_1(P_1+1)^2 + N_2(P_2+1)^2 + N_3(P_3+1)^2 \dots$$

in (37) einzusehen haben.

§ 3. Die erwähnte Tatsache, daß die künstlich durch Polymerisation oder Depolymerisation gewonnenen Stoffe nicht in molekular einheitlicher Form vorliegen, sondern als ein Gemisch polymerhomologer Moleküle, auf die zuerst Staudinger aufmerksam gemacht hat, legt die Frage nahe, nach was für einem Gesetz die verschiedenen Polymerisationsgrade in solch einem Gemisch verteilt sind.

Im Falle der Depolymerisation beschäftigte sich zuerst Kuhn¹⁾ mit dieser Frage. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Bindung gespalten ist, bezeichnet er mit α , die Wahrscheinlichkeit, daß eine nicht gespalten ist, ist dann $1 - \alpha$. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Bruchstück vom Polymerisationsgrad P entsteht, ist dann, da in diesem Falle zwei Bindungen gespalten und P nicht gespalten sein müssen

$$(39) \quad W = \alpha^2(1 - \alpha)^P.$$

Besteht die ursprüngliche Kette aus $P_0 + 1$ Gliedern, so können diese Bruchstücke bei $P_0 + 2 - (P + 1)$ verschiedenen Gliedern der Kette beginnen, so daß wir die oben erhaltene Wahrscheinlichkeit noch mit dieser Zahl, oder weil P und 1 klein im Verhältnis zu P_0 sind, einfach mit P_0 zu multiplizieren haben. Also folgt für die Zahl der Bruchstücke von der Gliederzahl $P + 1$

$$(40) \quad z_{P+1} = P_0 \alpha^2 (1 - \alpha)^P$$

und das ist die bekannte Kuhnsche Formel. Selbstverständlich haben wir

$$(41) \quad \sum_{P=0}^{\infty} (P+1) z_{P+1} = P_0 + 1.$$

In den meisten Fällen genügt schon ein Abbau auf ein Fünftel der ursprünglichen Kettenlänge eines als molekular einheitlicher Stoff vorliegenden Kettenpolymers, damit im praktischen Sinne die Kuhnsche Verteilung auftreten soll²⁾.

1) W. Kuhn, Ber. dtsch. chem. Ges. 63. S. 1503. 1930.

2) G. V. Schulz, Ztschr. f. phys. Chem. B. 51. S. 127. 1942.

Das analoge Problem bei der Polymerisation hat Schulz¹⁾ bearbeitet. Bezeichnen wir mit ihm das Verhältnis der Wahrscheinlichkeit w_B , daß eine Kette gleichmäßig durch eine Reaktion weiter wächst, zu der, daß eine zum Abbruch führende Reaktion auftritt und die wir mit w_e bezeichnen, mit β , also

$$(42) \quad \frac{w_e}{w_B} = \beta.$$

Da weiterhin

$$(43) \quad w_B + w_e = 1$$

sein muß, so folgt

$$(44) \quad w_B = (1 + \beta)^{-1},$$

oder für $\beta < 1$, was immer der Fall sein muß, wenn überhaupt lange Ketten entstehen

$$(45) \quad w_B = 1 - \beta.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Molekül des Polymerisationsgrades P entsteht, ist also

$$(46) \quad w_P = (1 - \beta)^P$$

und die Zahl der Moleküle derselben Gliederzahl

$$(47) \quad N_P = c(1 - \beta)^P.$$

Wo c eine Konstante ist, die wir aus der selbstverständlichen Gleichung

$$(48) \quad \sum_{P=0}^{\infty} (P + 1) N_P = N_0.$$

in der N_0 die Anzahl aller Grundmoleküle bedeutet, berechnen können wenn wir (47) einsetzen. Dann folgt endlich

$$(49) \quad N_P = N_0 \frac{(1 - \beta)^P}{\sum_{P=0}^{\infty} (P + 1)(1 - \beta)^P}$$

für die Formel von Schulz. Mit Hilfe seiner Formel hat Schulz noch bewiesen, daß der massenmäßig am stärksten vertretene Polymerisationsgrad auch gleichzeitig der mittlere Polymerisationsgrad ist.

Vergleichen wir jetzt die Formeln von Kuhn (40) und die von Schulz (49), so ist leicht erkenntlich, daß eigentlich beide zur selben Verteilung der Molekulargewichte führen. Um das einzusehen, müssen

1) G. V. Schulz, Ztschr. f. phys. Chem. B. 30. 379. 1935.

wir nur (40) in (41) einsetzen und mit Hilfe der erhaltenen Gleichung die Konstante α^2 aus (40) eliminieren. Wir erhalten dann

$$(50) \quad z_P = P_0 \frac{(1 - \alpha)^P}{\sum_{P=0}^{\infty} (P+1)(1 - \alpha)^P},$$

was abgesehen von den Bezeichnungen mit der Formel (49) übereinstimmt.

Entgegen den bei künstlich durch Polymerisation und Kondensation hergestellten Stoffen auftretenden Verhältnissen liegen die in Lebewesen entstehenden Hochpolymeren in molekular einheitlicher Form vor. So z. B. die Eiweißstoffe, die Cellulose usw. Nach Husemann¹⁾ ist dagegen das Mannan, ein Reservepolysaccharid der Orchideen, ein Gemisch von polymerhomologen Molekülen, verhält sich also in dieser Hinsicht, wie eine künstlich polymerisierte Substanz. Husemann vermutet, daß dieser Befund für andere Reservestoffe zu verallgemeinern ist.

Aus den erwähnten Betrachtungen folgt also, daß man bei der Messung des Polymerisationsgrades einen Mittelwert dieser Größe erhalten wird. Die verschiedenen Meßmethoden führen jedoch nicht alle zu demselben Mittelwert. Staudinger und Heuer²⁾ wiesen es schon experimentell nach, daß der viskosimetrisch bestimmte Polymerisationsgrad größer ist, als der osmotisch bestimmte.

Aus der Messung des osmotischen Druckes oder aus den dazu proportionalen Größen, wie der Erniedrigung des Schmelzpunktes oder der Dampfspannung erhält man, da bei diesen Erscheinungen nur die Zahl der Moleküle eine Rolle spielt, einen linearen Mittelwert des Polymerisationsgrades. Also in unseren Bezeichnungen:

$$(51) \quad 1 + P = \frac{\sum_{P=0}^{\infty} N_P (P+1)}{\sum_i N_i} = \frac{N_0}{\sum_i N_i}.$$

Ebenso kann man durch fraktionierte Fällung ein Gemisch von Polymerhomologen in seine Anteile zerlegen, wie das Schulz³⁾ gezeigt hat und auf diese Weise den Mittelwert (51) berechnen. Die Methode beruht darauf, daß die Löslichkeit mit steigendem Molekulargewicht

1) E. Husemann, J. prakt. Chem. 155. S. 241. 1940.

2) H. Staudinger, Die hochmolekularen organischen Verbindungen Kautschuck und Cellulose, Berlin, J. Springer 1932. S. 169.

3) G. V. Schulz, Ztschr. f. phys. Chem. B. 47. S. 155. 1940.

abnimmt. Außerdem erhält man den obigen Mittelwert auch durch Bestimmung der Zahl der Endgruppen.

Weiter haben noch Signer und Groß¹⁾ und Kraemer²⁾ Gemische von polymerhomologen Molekülen mit Hilfe der Ultrazentrifuge in ihre Anteile zerlegt.

Aus dem Staudingerschen Viskositätsgesetz³⁾

$$(52) \quad \eta_{sp.} = k c P,$$

wo $\eta_{sp.}$ die spezifische Viskosität der Lösung eines Fadenkettenpolymers, c die Konzentration und P den Polymerisationsgrad bedeuten, und k eine Konstante ist, erhält man ebenfalls einen Mittelwert des Polymerisationsgrades, wenn man das erwähnte Gesetz auf ein Gemisch von polymerhomologen Molekülen anwendet; wir bezeichnen denselben mit \bar{P} . Um mit unseren früheren Bezeichnungen in Einklang zu bleiben, schreiben wir (52) folgendermaßen für einheitliche Moleküle

$$(53) \quad \eta_{sp.} = l N_0 P,$$

wo jetzt l eine andere Konstante als k ist. Für ein Gemisch von polymerhomologen Molekülen folgt dann mit Hilfe der in (47) und (48) eingeführten Bezeichnungen

$$(54) \quad \eta_{sp.} = \sum \Delta \eta_{sp.} = l \sum_{P=0}^{\infty} (P+1) P N_P.$$

Aus einem Vergleich von (53) und (54) folgt dann, wenn wir für den neuen Mittelwert die oben eingeführte Bezeichnung benutzen und gleichzeitig eins neben P vernachlässigen

$$(55) \quad \bar{P} = \frac{\sum_{P=0}^{\infty} N_P P^2}{\sum_{P=0}^{\infty} N_P P} = \frac{1}{N_0} \sum_{P=0}^{\infty} N_P P^2,$$

das also der viskosimetrische Mittelwert des Polymerisationsgrades von Staudinger ist.

1) R. Signer, u. H. Groß, *Helv. chim. Acta* 17. S. 726. 1934.

2) The Svedberg, *Die Ultrazentrifuge*. Dresden. T. Steinkopff. 1940. Artikel von E. O. Kraemer, S. 293.

3) H. Staudinger u. W. Heuer, *Ber. dtsch. chem. Ges.* 63. S. 222. 1930; *Ztschr. f. phys. Chem. A* 153. S. 391. 1931; *Ber. dtsch. chem. Ges.* 65. S. 267. 1932 u. H. Staudinger, *Die hochmolekularen organischen Verbindungen* S. 56.

Staudinger und Nuß¹⁾ haben bewiesen, daß dieses Viskositätsgesetz entgegen der Behauptung von Kraemer und van Natta²⁾ bei Polyoxyundecansäuren bis zur Gliederzahl 1600 gültig ist. Nur solche Stoffe bilden eine Ausnahme, die nicht aus Faden, sondern aus verzweigten Ketten bestehen. Kern³⁾ hat mathematisch bewiesen, daß der Staudingersche Mittelwert des Polymerisationsgrades (55) immer größer als der osmotische (51) sein muß und Schulz⁴⁾ hat es außerdem berechnet, daß im Falle der Kuhn-Schulzschen Verteilung (55) gerade doppelt so groß sein muß, als (51). Anschaulich sind diese Verhältnisse auch schon daraus zu ersehen, daß viele kleinere Moleküle osmotisch sehr wirksam sind, die Viskosität dagegen kaum beeinflussen, wenige lange Moleküle erhöhen dagegen kaum den osmotischen Druck, aber sehr stark die Viskosität⁵⁾.

Lansing und Kraemer⁶⁾ haben eine Systematik der erhaltenen Mittelwerte aufgestellt und haben bewiesen, daß die Gleichgewichtsupltrazentrifuge einen weiteren Mittelwert liefert, den man in unseren Bezeichnungen folgendermaßen schreiben kann:

$$(56) \quad \bar{P} = \frac{\sum_{P=0}^{\infty} N_P P^3}{\sum_{P=0}^{\infty} N_P P^2}.$$

Schulz und Löhmann⁷⁾ haben die Formel, nach der der Abbau eines Hochpolymeren zeitlich abläuft, mathematisch hergeleitet und erhielten das Ergebnis

$$(57) \quad t = \frac{1}{K} \left(\frac{1}{P_t} - \frac{1}{P_s} \right),$$

wo P_s den Anfangspolymerisationsgrad, P_t den zur Zeit t und K eine Konstante bedeuten.

Husemann und Weber⁸⁾ haben gereinigte Baumwolle hydrolytisch abgebaut und die dadurch erhaltene polymerhomologe Reihe

- 1) H. Staudinger u. O. Nuß, Journ. f. prakt. Chem. 157. S. 283. 1941.
- 2) E. O. Kraemer u. F. J. van Natta, Journ. phys. chem. 26. S. 3186. 1932.
- 3) W. Kern, Ber. dtsh. chem. Ges. 68. S. 1439. 1935.
- 4) G. V. Schulz, Ztschr. f. phys. Chem. B. 30. S. 379. 1935; 32. S. 27. 1936; 47. S. 155. 1940.
- 5) Vgl. H. Staudinger u. Mitarbeiter, Helv. chim. Acta 12. S. 941. 1929.
- 6) W. D. Lansing u. E. O. Kraemer, Journ. of the Amer. Chem. Soc. 57. S. 1369. 1935.
- 7) G. V. Schulz u. H. J. Löhmann, Journ. f. prakt. Chem. 157. S. 238. 1941.
- 8) E. Husemann u. O. H. Weber. Naturw. 30. S. 280. 1942.

von Cellulosen, mit Hilfe der osmotischen, der viskosimetrischen und der Endgruppenmethode bezüglich des Polymerisationsgrades untersucht. Die erhaltenen Ergebnisse stimmten sehr gut miteinander überein und die Staudingersche Beziehung wurde damit gleichzeitig bis zum Molekulargewicht 336000 bestätigt.

Es fragt sich nun, zu welchem Mittelwert des Polymerisationsgrades unsere „diffusometrische“ Methode führt. Aus (37) und (38) folgt für die gestreute Lichtintensität eines Gemisches von polymerhomologen Molekülen

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} I_{\perp} &= \frac{2\pi^2 \nu^4}{r^2 c^2} E_0^2 \sum_{P=0}^{\infty} N_P (P+1)^2 \frac{2}{15} \\ &\quad \cdot \{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - b_1 b_2 - b_2 b_3 - b_3 b_1\}. \end{aligned} \right.$$

Vergleichen wir jetzt die gestreuten Lichtintensitäten bei zwei verschiedenen Zuständen der Polymerisation, so folgt

$$(59) \quad \frac{I_{\perp}}{I'_{\perp}} = \frac{\sum_{P=0}^{\infty} N_P (P+1)^2}{\sum_{P'=0}^{\infty} N_{P'} (P'+1)^2} = \frac{\bar{P}}{\bar{P}'}.$$

Ein Vergleich mit (54) und (55) zeigt gleich, daß wir es hier ebenfalls mit dem viskosimetrischen Mittelwert zu tun haben. (Da P eine große Zahl ist, kann man daneben eins wieder vernachlässigen.) Unter Berücksichtigung von (48) und (53) kann man also in (58)

$$(60) \quad \sum_{P=0}^{\infty} N_P (P+1)^2 = N_0 \bar{P}$$

einsetzen.

§ 4. Bis jetzt haben wir immer nur von der Lichtzerstreuung der hochpolymeren Moleküle gesprochen. Tatsächlich wird aber selbstverständlich auch immer das Lösungsmittel Licht streuen. Die Streuung würde ja nur in einem ideal vollständigen Kristallgitter (ohne Wärmeschwingungen) verschwinden. Smoluchowski¹⁾ und Einstein²⁾ entwickelten die Theorie der Lichtzerstreuung von Flüssigkeiten unter der Grundidee der Dichteschwankungen. Da aber einerseits diese Art von Streuung auf einen Depolarisationsgrad gleich Null führt, andererseits aber man einen endlichen Depolarisationsgrad bei Flüssigkeiten einwandfrei nachgewiesen hat, so haben

1) M. Smoluchowski, Ann. d. Phys. 25. S. 219. 1908.

2) A. Einstein, Ann. d. Phys. 33. S. 1295. 1910.

Raman¹⁾ und Gans²⁾ die Theorie dahin erweitert, daß außer der vorher erwähnten Dichtestreuung noch eine Orientierungsstreuung auftritt, — welche von der Anisotropie der Orientierungen der Moleküle verursacht wird.

Es fragt sich also, wie wir die Lichtzerstreuung unserer Lösung zu messen haben, damit ein möglichst geringer Teil der Streuung des Lösungsmittels mitgemessen wird. Unsere Formel (58) haben wir aus (37) hergeleitet und da in diesem Falle in der Richtung des elektrischen Vektors des einfallenden Lichtes die Streuintensität beobachtet wird, so liefert dazu die Dichtestreuung des Lösungsmittels die ja keine Depolarisation verursacht, keinen Betrag. Den zweiten Teil der Flüssigkeitsstreuung können wir auf diesem Wege nicht eliminieren, jedoch kann der klein gehalten oder sogar zum Verschwinden gebracht werden, wenn wir solche Lösungsmittel benutzen, deren Moleküle wenig anisotrop, wie Wasser, Methanol, Azeton usw. oder sogar kugelsymmetrisch (z. B. CCl_4) sind³⁾.

Die Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Gliedern der hochpolymeren Moleküle und denen des Lösungsmittels brauchen wir nicht gesondert zu berücksichtigen, weil wir die Polarisierbarkeiten b_1 , b_2 und b_3 schon so definieren können, daß sie die abgeänderten Polarisierbarkeiten des gelösten Moleküles und außerdem die der daran (durch Dipol- oder van der Waals'sche Kräfte usw.) gebundenen Moleküle des Lösungsmittels bedeuten.

Ein wesentlicher Vorteil der neuen Methode ist, daß man den Prozeß der Polymerisation oder Depolymerisation im Ablaufe verfolgen kann, ohne in den Prozeß selbst eingreifen zu müssen. Höchstens die viskosimetrische Methode hätte noch ähnliche Vorteile, aber auch die beansprucht mehr Zeit.

Bis jetzt haben wir immer angenommen, daß die Fadenketten gerade und außerdem ihre Längen klein im Verhältnis zur Wellenlänge des Lichtes sind. Die Lichtzerstreuung von solchen Ketten, die nicht mehr klein im Verhältnis zu λ sind, werden wir im nächsten Paragraphen herleiten. Bezüglich der stark umstrittenen Frage, ob die Fadenketten gerade sind, oder nicht, wollen wir hier nicht Stellung nehmen, sondern unsere Formeln auf diese beiden Fälle spezialisieren, um auf dem Wege eine Methode angeben zu können,

1) C. V. Raman, *Molecular Diffusion of Light*. Calcutta 1922; C. V. Raman u. Seshagiri Rao, *Phil. Mag.* 45. S. 625. 1922; Vgl. auch R. S. Krishnan, *Proc. Ind. Ac. Sc. [A.]* 1. S. 782. 1935 u. *Koll. Ztschr.* 84. S. 8. 1938.

2) R. Gans, *Ztschr. f. Phys.* 17. S. 353. 1923.

3) Bezüglich der Messung der Lichtzerstreuung von Lösungen der Hochpolymeren vgl. W. Lotmar, *Helv. chim. Acta* 21. S. 792. 1938; 21. S. 953. 1938.

mit Hilfe derer man durch Beobachtung der Lichtzerstreuung entscheiden kann, daß, wenn ja, bei welchem Grade der Polymerisation eine Verbiegung eintritt.

Nehmen wir also an, daß die Fadenkette verbogen oder geknäuelt ist, so sind die einzelnen Glieder zueinander nicht mehr parallel und das bedeutet, daß in (58) die Größen b_1 , b_2 und b_3 sich miteinander vermischen. Wird diese Knäuelung so stark, daß das Molekül dadurch kugelsymmetrisch wird, so verschwindet (58) vollständig. Beobachten wir dagegen die gestreute Lichtintensität ebenfalls senkrecht zum Primärstrahl aber auch senkrecht zum elektrischen Vektor der einfallenden Lichtwelle und außerdem durch einen Analysator, der nur das zur Schwingungsrichtung des Primärstrahles parallel schwingende Licht durchläßt, so entspricht das dann Fall (34) und wir erhalten analog zu (58)

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} I_{\parallel} &= \frac{2\pi^2\nu^4}{r^2c^2} E_0^2 \sum_{P=0}^{\infty} N_P (P+1)^2 \\ &\quad \left\{ \frac{1}{5} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + \frac{2}{15} (b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1) \right\}. \end{aligned} \right.$$

(61) ist von (58) nur in dem verschieden, daß darin der in (13) vorkommende Klammerausdruck steht. I_{\parallel} wird sich aber infolge einer Knäuelung der Moleküle bemerkbar kaum ändern, weil ja darin alle Glieder addiert werden. Selbstverständlich muß aber bei (61) berücksichtigt werden, daß in diesem Falle der Beobachtung die Dichtestreuung des Lösungsmittels mitgemessen wird (die sich jedoch infolge der Polymerisation nicht ändert und deshalb aus den Messungsergebnissen subtrahiert werden kann). Ein weiteres Zeichen der Verbiegung der Fadenkettenmoleküle ist außerdem, daß, solange die Fadenketten gerade sind, die Depolarisationen \mathcal{A} und \mathcal{A}' [vgl. (9) und (10)] bei zunehmender oder abnehmender Polymerisation sich bemerkbar nicht ändern, tritt dagegen eine Knäuelung auf, so nehmen damit die Depolarisationen ab und bei der Bildung eines kugelsymmetrischen Knäuels verschwinden beide.

Solange also die Fadenkette gerade ist, nehmen mit zunehmendem Polymerisationsgrad (58) und (61) monoton zu und der Depolarisationsgrad [(9) und (10)] bleibt konstant. Verbiegt sich dagegen die Fadenkette mit zunehmender Polymerisation oder knäueln sie sich sogar, so nimmt deshalb (61) noch immer monoton zu, (58) und der Depolarisationsgrad nehmen dagegen ab und im Falle der Entstehung eines kugelsymmetrischen Knäuels verschwindet auch (58) und auch die Depolarisation. Diese theoretischen Resultate geben eine Möglichkeit,

um über die stark umstrittene Frage der geraden oder verbogenen Ketten auf experimentellem Wege zu entscheiden.

Ein weiterer interessanter Fall ist der der verzweigten Ketten. Die viskosimetrische Methode ist dann selbstverständlich nicht mehr brauchbar. Zur hier besprochenen „diffusometrischen Methode“ ist dagegen nur zu bemerken, daß sich in diesem Falle die Komponenten der Polarisierbarkeiten wieder miteinander vermischen können, wenn auch in einem kleineren Maße wie bei der Knäuelung, weil ja die einzelnen Äste von solch einem Molekül nicht parallel sein müssen und die Brauchbarkeit von (58) deshalb in einigen Fällen fraglich sein kann, an (61) ändert sich jedoch nichts Wesentliches, ebenso wie bei den verbogenen Ketten.

Wir sehen also, daß die hier besprochene Methode nicht nur auf Kettenpolymere, sondern zur Untersuchung des Ganges der Polymerisation auf alle makromolekularen Stoffe anwendbar ist.

§ 5. Bis jetzt haben wir immer angenommen, daß die Länge der Fadenkette klein im Verhältnis zur Wellenlänge des Lichtes ist. Es ist dagegen nicht zu leugnen, daß schon so hohe Polymerisationsgrade bekannt sind, bei denen diese Bedingung nicht mehr erfüllt ist. Wir wollen deshalb jetzt die Lichtzerstreuung von geraden oder doch wenigstens in einer Richtung langgestreckten Fadenketten berechnen, deren Länge nicht mehr klein im Verhältnis zu λ ist und wo wir zur Vereinfachung annehmen, daß alle Glieder dieser Kette die skalare Polarisierbarkeit b besitzen. Dies ist in unserem Falle in erster Annäherung erlaubt, weil es sich ja, wie wir das schon besprochen haben, bei der Beobachtung des Ganges der Polymerisation nicht um die Messung des Depolarisationsgrades, welche von der Anisotropie abhängt, sondern um die Beobachtung der Änderung der gestreuten Lichtintensität handelt.

Zur Durchführung der Rechnung betrachten wir zuerst eine Fadenkette, die bloß ein zweiatomiges Molekül ist; die zwei Atome die nach unserer Annahme beide die Polarisierbarkeiten b besitzen, bezeichnen wir mit A und B (vgl. die Abb. 1). B liegt im allgemeinen nicht in der durch die Primärstrahlrichtung (X -Achse) und Streurichtung gelegten Ebene. In der Abb. 1 führen wir zu den von Debye¹⁾ bei der Berechnung der Röntgenstreuung von Gasmolekülen benützten analoge Bezeichnungen ein. Den Winkel, den die Fadenachse und die Winkelhalbierende l zwischen der Streu-

1) P. Debye, Ann. d. Phys. 46. S. 809. 1915; Phys. Ztschr. 31. S. 419. 1930; P. Ehrenfest, Proc. Amsterdam 23. S. 1132. 1915.

also mit Hilfe von (65)

$$(68) \quad \Delta = 2d \cos \chi \sin \frac{\theta}{2}.$$

Haben wir statt eines zweiatomigen Moleküls eine Fadenkette, die aus $P+1$ Gliedern besteht und besitzt jedes Glied die Polarisierbarkeit b , so folgt statt (63)

$$(69) \quad \dot{M}_z = b \sum_{n=0}^P \cos 2\pi \nu \left(t - \frac{n\Delta}{c} \right) \cdot E_0$$

oder

$$(70) \quad M_z = b E_0 \left\{ \left(\sum_{n=0}^P \cos 2\pi \frac{\nu n \Delta}{c} \right) \cos 2\pi \nu t + \left(\sum_{n=0}^P \sin 2\pi \frac{\nu n \Delta}{c} \right) \sin 2\pi \nu t \right\}.$$

Da es sich um sehr viele Glieder handelt und außerdem $\frac{c}{\nu} = \lambda$ sehr groß im Verhältnis zu Δ ist, können wir die Summen in (70) in Integrale umformen:

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} M_z = b E_0 & \left\{ \int_{\xi=0}^P \cos 2\pi \nu \frac{\Delta}{c} \xi d\xi \cdot \cos 2\pi \nu t \right. \\ & \left. + \int_{\xi=0}^P \sin 2\pi \nu \frac{\Delta}{c} \xi d\xi \cdot \sin 2\pi \nu t \right\}. \end{aligned} \right.$$

Führen wir die Integrationen aus, so folgt

$$(72) \quad M_z = \frac{b E_0 c}{2\pi \nu \Delta} \left\{ \sin 2\pi \nu \frac{\Delta}{c} P \cdot \cos 2\pi \nu t - \left(\cos 2\pi \nu \frac{\Delta}{c} P - 1 \right) \sin 2\pi \nu t \right\}$$

und mit Hilfe der vereinfachenden Bezeichnungen

$$(73) \quad U = \frac{b E_0 c}{2\pi \nu \Delta} \sin 2\pi \nu \frac{\Delta}{c} P \quad \text{und} \quad V = \frac{b E_0 c}{2\pi \nu \Delta} \left(\cos 2\pi \nu \frac{\Delta}{c} P - 1 \right)$$

für den zeitlichen Mittelwert von \dot{M}_z^2

$$(74) \quad \overline{\dot{M}_z^2} = 8\pi^4 \nu^4 (U^2 + V^2).$$

Andererseits haben wir für die gestreute Lichtintensität, deren Richtung der Winkel ϑ mit der Richtung des induzierten Dipols einschließt, unter Berücksichtigung von (20) und (19)

$$(75) \quad J = \overline{\mathfrak{E}} = \frac{c}{4\pi} [\overline{\mathfrak{E}}, \overline{\mathfrak{E}}],$$

wo

$$(76) \quad E(r, \vartheta) = H(r, \vartheta) = \frac{1}{r c^2} |\dot{M} \sin \vartheta|$$

ist. Aus (74), (75) und (76) folgt also

$$(77) \quad J = \frac{1}{4\pi r^2 c^2} 8\pi^4 \nu^4 (U^2 + V^2) \sin^2 \vartheta$$

und weiter wenn wir U und V aus (73) einsetzen

$$(78) \quad J = \frac{b^3 E_0^2 \pi^2 \nu^2}{r^2 c^2 d^2} \left\{ 1 - \cos 2\pi \nu \frac{d}{c} P \right\} \sin^2 \vartheta.$$

Das ist die von einer Fadenkette, deren räumliche Orientierung durch die Winkel χ und ψ festgelegt ist, in der Θ -Richtung gestreute Lichtintensität. Fragen wir dagegen nach der Streuintensität die von N regellos orientierten solchen Fadenketten verursacht wird, so müssen wir (78) über alle möglichen Werte von χ und ψ mitteln und dann mit N multiplizieren. Um die Rechnungen durchführen zu können, setzen wir (68) in (78) ein und benützen außerdem die Bezeichnung

$$(79) \quad q = 4\pi \nu \frac{1}{c} \sin \frac{\Theta}{2},$$

dann folgt

$$(80) \quad J = \frac{4b^3 E_0^2 \pi^2 \nu^4}{r^2 d^2 c^2 q^2} \cdot \frac{1 - \cos(q d P \cos \chi)}{\cos^2 \chi} \sin^2 \vartheta.$$

Den zweiten Faktor in (80) müssen wir jetzt über alle Orientierungen mitteln, also

$$(81) \quad \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(q d P \cos \chi)}{\cos^2 \chi} \sin \chi \, d\chi \, d\psi$$

berechnen. Es sei $\cos \chi = u$ und daher $-\sin \chi \, d\chi = du$, dann folgt für (81)

$$(82) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_{+1}^{-1} \frac{1 - \cos(q d P u)}{u^2} \, du \\ & = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{u} \right\}_{-1}^{+1} + \frac{\cos(q d P u)}{u} \Big|_{-1}^{+1} + q d P \int_{-1}^{+1} \frac{\sin(q d P u)}{u} \, du \right\} \\ & = \frac{1}{2} \{ 2(\cos q d P - 1) + 2q d P \cdot Si(q d P) \}. \end{aligned} \right.$$

Aus (80), (81) und (82) erhalten wir endlich die von N regellos orientierten Fadenketten in einer Richtung, die mit der Dipolachse (Richtung des elektrischen Vektors des Primärlichtstrahles) den Winkel ϑ einschließt, gestreute Lichtintensität I . [Wenn wir außerdem nach Einsetzen unseres Resultates (82), noch mit N multiplizieren.] Also

$$(83) \quad I = \frac{4b^3 E_0^2 \pi^2 \nu^4}{r^2 d^2 c^2 q^2} N \{ (\cos q d P - 1) + q d P \cdot Si(q d P) \} \sin^2 \vartheta.$$

Dieses Resultat bezieht sich auf linear polarisiertes Primärlicht. Benützen wir natürliches Licht, so müssen wir dies in zwei auf-

einander senkrechte Polarisationsrichtungen zerlegen, die beide die halbe Lichtintensität enthalten. Die eine Komponente wählen wir so, daß ihr elektrischer Vektor senkrecht zur Zeichenebene (Abb. 1) schwingt, für diesen Anteil ist dann $\sin^2 \vartheta = 1$, für die zweite Komponente mit dem elektrischen Vektor in der Zeichenebene folgt dagegen $\sin^2 \vartheta = \cos^2 \Theta$. Endlich erhalten wir also für die in einer Richtung, die mit der Richtung des Primärstrahles den Winkel Θ einschließt, gestreute Lichtintensität im Falle von natürlichem Primärlicht

$$(84) \quad I = \frac{4b^3 E_0^2 \pi^2 r^4}{r^4 d^3 c^3 q^3} N \{ \cos(qdP) - 1 + qdP \cdot Si(qdP) \} \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2}.$$

In (83) und (84) steht im zweiten Gliede die Funktion Integralsinus, die wir aus dem in (82) stehenden Integral erhalten haben:

$$(85) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{\sin(qdPu)}{qdPu} qdP \cdot du = \int_{-qdP}^{+qdP} \frac{\sin t}{t} dt = 2 \int_0^{qdP} \frac{\sin t}{t} dt = 2 Si(qdP).$$

Die Werte dieser Funktion können wir aus den Tabellen von Jahnke und Emde¹⁾ entnehmen, in vielen bei unserem Problem in Betracht kommenden Fällen wird man sich aber mit einer Reihenentwicklung begnügen können. Zu diesem Zwecke setzen wir in qdP (79) ein:

$$(86) \quad qdP = 4\pi r \frac{1}{c} \sin \frac{\Theta}{2} \cdot dP.$$

$d \cdot P$ ist aber die Länge der Fadenkette; wir bezeichnen dieselbe mit L . $\sin \frac{\Theta}{2}$ kann nicht größer als 1 werden. Führen wir noch die Wellenlänge λ des Lichtes ein, so folgt

$$(87) \quad qdP = 4\pi \frac{L}{\lambda} \sin \frac{\Theta}{2}.$$

Wir sehen also, daß wir unsere in (83) und (84) stehenden Funktionen für praktische Zwecke in eine Reihe entwickeln können, wenn (im ungünstigen Falle) die Kettenlänge nicht größer als ein Achtel der Wellenlänge des Lichtes ist; wählen wir jedoch den Beobachtungswinkel Θ klein, so können wir damit den Anwendungsbereich unserer Formeln vergrößern. Benützen wir also die Reihe

$$(88) \quad \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = Si x = x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5} \frac{x^5}{5!} \dots$$

1) E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, 3. Aufl. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin 1938. S. 3.

(Vgl. Jahnke-Emde, a. a. O.) und behalten in (84) nur die in qdP quadratischen Glieder, so folgt, wenn wir auch wieder λ einführen

$$(89) \quad I = \frac{2\pi^2 c}{r^2 \lambda^4} b^2 P^2 E_0^2 N \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2},$$

also das aus der elementaren Theorie unmittelbar ableitbare Resultat, wenn man die Länge der Fadenkette als sehr klein im Verhältnis zu λ annimmt.

Berücksichtigen wir auch noch ein weiteres Glied in den Reihenentwicklungen, so folgt

$$(90) \quad I = \frac{2\pi^2 c}{r^2 \lambda^4} b^2 P^2 E_0^2 N \left\{ 1 - \frac{(qdP)^2}{36} \right\} \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2}.$$

In den meisten Fällen wird schon diese Formel genügen. Vollständigkeithalber geben wir noch die aus der Entwicklung der in (84) stehenden zwei transzendenten Funktionen folgende Reihe an:

$$(91) \quad \left\{ \begin{aligned} I &= \frac{2\pi^2 c}{r^2 \lambda^4} b^2 P^2 E_0^2 N \cdot 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (qdP)^{2n} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{(2n+2)!} \right\} \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2}. \end{aligned} \right.$$

Diese Reihenentwicklung ist bis $qdP = 17$ konvergent.

Es sei noch bemerkt, daß bei dem hier besprochenen Problem, auch eine Art Mie-Effekt (das immer stärkere Vorwiegen der Streuung nach vorne mit zunehmender Teilchengröße) auftritt. Ist nämlich der Winkel Θ klein, so folgt aus (86) und (85), daß die Argumente des Kosinus und Integralsinus ebenfalls klein werden und wir können uns deshalb mit dem ersten Glied in (88) begnügen. Also vereinfacht sich (84) zu (89) und das ist der größtmögliche Wert von I . Mit zunehmendem Θ muß dann nach (87) immer mehr ein weiteres Glied in den Reihen berücksichtigt werden, also werden wir zu der Formel (90) geführt, aus der gleich zu sehen ist, wenn wir für qdP (87) einsetzen, daß I mit zunehmendem Θ abnimmt. Die Proportionalität zu λ^{-4} bleibt ebenfalls nicht mehr erhalten, weil in (90) und (91) q nach (79) λ^{-1} als Faktor enthält. Es kann jedoch auf diesem Wege unmöglich ein Effekt auftreten, der sein Maximum im ultraroten Gebiet hat.

Zur praktischen Anwendung unserer hier hergeleiteten Formeln zur Berechnung des Polymerisationsgrades aus den gemessenen Werten der Intensität des gestreuten Lichtes, müssen noch folgende Umstände berücksichtigt werden:

Erstens wird es sich ja selbstverständlich wieder um ein Gemisch von polymerhomologen Molekülen handeln, da aber P in (84), (90) und (91) öfters vorkommt, so können wir nicht so exakt einen Mittel-

wert dieser Größe definieren, wie bei dem Problem der Ketten, die klein im Verhältnis zu λ waren und können bloß sagen, daß nach (89) bei abnehmendem Streuwinkel diese Größe in den „viskosimetrischen Mittelwert“ übergehen muß.

Benützen wir also wieder den in (55) eingeführten Mittelwert für P , dann können wir (89) exakt und (90) und (91) in guter Annäherung wie folgt schreiben:

$$(92) \quad I = \frac{2\pi^2 c}{r^2 \lambda^4} b^2 N_0 \bar{P} E_0^2 \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2},$$

$$(93) \quad I = \frac{2\pi^2 c}{r^2 \lambda^4} \cdot b^2 N_0 \bar{P} E_0^2 \left\{ 1 - \frac{(q d \bar{P})^2}{36} \right\} \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2}$$

und

$$(94) \quad \left\{ I = \frac{2\pi^2 c}{r^2 \lambda^4} b^2 N_0 \bar{P} E_0^2 \cdot 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (q d \bar{P})^{2n} \cdot \left\{ \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{(2n+2)!} \right\} \frac{1 + \cos^2 \Theta}{2} \right.$$

In dieser Form kann man dann unsere Formeln analog zu (59) unmittelbar zur Berechnung des Ganges der Polymerisation aus den sich auf die Lichtstreuung beziehenden Messungsergebnissen anwenden. (89), (90) und (91) sind dagegen nicht unmittelbar dazu geeignet, weil in diesen Formeln N sich während dem Ablauf der Polymerisation ändert.

Alle in diesem Paragraphen hergeleiteten Resultate beziehen sich selbstverständlich auf starre lange Stäbchenmoleküle. Handelt es sich dagegen um Ketten, die sich mit zunehmendem Polymerisationsgrad knäueln, so bleibt auch noch bei sehr hohen Polymerisationsgraden (92) gültig und das gibt eine weitere Methode zur Entscheidung dieser umstrittenen Frage auf experimentellem Wege.

§ 6. Eine weitere Einschränkung der Gültigkeit unserer Formeln rührt daher, daß die ja nur dann anwendbar sind, wenn die einzelnen Makromoleküle regellos in der Lösung verteilt sind, sich also keine Mizellen bilden. Nach Meier und van der Wyk¹⁾ kann man das Assoziationsbestreben von Fadenketten mit Hilfe einer Konstante definieren:

$$(95) \quad \frac{n_{v+2}}{n_1 \cdot n_{v+1}} = \frac{n_{v+1}}{n_1 n_v} = \dots = \frac{n_2}{n_1^2} = K,$$

1) K. H. Meyer u. A. J. A. van der Wyk, *Helv. chim. Acta* 20. S. 1321. 1937; K. H. Meyer u. H. Mark, *Hochpolymere Chemie* Bd. I. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft 1940. S. 255.

wo ν die Zahl der Fadenmoleküle in einer Mizelle und n die Anzahl solcher Mizellen bedeuten. Ist K klein (etwa 0,1) so sind fast alle Ketten monomolekular gelöst und das ist das Gültigkeitsbereich unserer Formeln, größere Werte ($K = 10000$ und darüber) verursachen dagegen eine starke Assoziation der Ketten und es kommen Mizellen, die aus mehreren hundert Einzelmolekülen bestehen, auch im verdünnten Zustande vor. Solche Assoziationen sind selbstverständlich nur bei langgestreckten und nicht bei geknäulten Molekülen denkbar.

In diesem letzteren Zustande kann ein anderer optischer Effekt der Plotnikoweffekt¹⁾, zustande kommen, wie das vom Verf.²⁾ theoretisch gezeigt wurde. Die Erscheinung beruht darauf, daß infolge der ultraroten Schwingungsfrequenzen der einzelnen Atome oder Radikale die Fadenketten in diesem Gebiet stark anisotrop sind und demzufolge erst recht die aus parallelisierten Fadenketten bestehenden Mizellen. Wie die Rechnung zeigt, wirkt sich diese Anisotropie auch noch im nahen ultraroten und dunkelroten Gebiet aus und verursacht, daß solch ein Lichtstrahl in einem hochpolymeren Medium kegelförmig verbreitet wird³⁾.

1) J. Plotnikow u. L. Šplait, Phys. Ztschr. **31**. S. 369. 1930; J. Plotnikow, Allgemeine Photochemie. 2. Aufl. Berlin u. Leipzig, W. de Gruyter u. Co. 1936. S. 37 u. 125.

2) Th. Neugebauer, Phys. Ztschr. **41**. S. 55. 1940.

3) Die neuesten experimentellen Untersuchungen über diese Frage rühren von W. W. Lepeschkin (Phys. Ztschr. **43**. S. 489. 1942) her.

Budapest, Philosophische Fakultät d. Universität, Januar 1943.

(Eingegangen 17. Februar 1943)

Über die Aufzehrung von Edelgasen in Hohlkathoden und die damit verbundenen Vorgänge

Von Wilhelm Bartholomeyczuk

(Mit 15 Abbildungen)

Inhaltsübersicht:

I. Einleitung. — II. Aufzehrung: A. Versuchsmethode und Formierprozeß; B. Versuchsergebnisse. — III. Materialwanderung¹ in der Hohlkathode: A. Allgemeine Bemerkungen und Methodik; B. Versuchsergebnisse. — IV. Stromdichteverteilung: A. Allgemeine Bemerkungen und Methodik; B. Versuchsergebnisse; C. Diskussion. — V. Mechanismus der Aufzehrung. — VI. Schlußbemerkungen. — VII. Zusammenfassung.

I. Einleitung

Die älteren Arbeiten über die Aufzehrung von Gasen in einer elektrischen Gasentladung (clean up)¹⁾ haben sich im wesentlichen mit unedlen Gasen befaßt. Dabei stellten sich recht unübersichtliche und zum Teil auch widersprechende Ergebnisse heraus. Ein großer Teil der experimentellen Befunde ist auf entladungschemische Prozesse²⁾ zurückzuführen. Die Aufzehrung der Edelgase versuchte man einerseits durch die „Einmauerung“ der Edelgasatome im Bestäubungsniederschlag³⁾ zu deuten, andererseits wurde speziell bei Helium die Bindung chemischer Verbindungen in der Entladung⁴⁾ herangezogen. Schließlich versuchten H. Alterthum, A. Lompe und R. Seeliger⁵⁾ die Aufzehrung der Edelgase durch die einfache Vorstellung des Hineinschießens der Gasatome als Ionen in die Kathode zu deuten. Jedoch konnte trotz des anschließend weiter von Alterthum und Lompe⁶⁾ gesammelten Erfahrungsmaterials

1) Vgl. die Berichte: E. Pietsch, *Erg. exakt. Naturw.* 5, S. 213. 1926; S. Dushman, *Hochvakuumtechn.* Berlin 1926, Kap. 5.

2) Z. B. E. Hiedemann, *Ann. d. Phys.* [5] 8. S. 456. 1931; O. S. Duffendaek, R. A. Wolfe u. F. Lederer, *J. opt. Soc. amer.* 31. S. 174. 1941.

3) G. Claude, *Comp. rend.* 136. S. 1317. 1913.

4) I. Manley, *Nature* 114. S. 861. 1924; E. H. Boomer, *Proc. of Royal Soc. A.* 109. S. 198. 1925; *Nature* 115. S. 16. 1925.

5) H. Alterthum, A. Lompe u. R. Seeliger, *Ztschr. f. techn. Phys.* 17. S. 407. 1936.

6) H. Alterthum u. A. Lompe, *Ztschr. f. techn. Phys.* 19. S. 113. 1938.

der Mechanismus im einzelnen noch nicht geklärt werden, da sich z. B. zwar große Unterschiede zwischen den einzelnen untersuchten Kathodenmaterialien ergaben, aber kein Zusammenhang mit irgendwelchen Materialeigenschaften, wie Kathodenfall, Gitterbau und Korngröße; insbesondere zeigte die von Alterthum und Lompe angegebene Reihenfolge der Kathodenmaterialien Nb, Ta, Al, Ag, Fe, W, Pb, Ni, Cu, Cr, Mo, Mg, C, keinen Zusammenhang mit der Zerstäubungsgeschwindigkeit der betreffenden Materialien.

Die Einschußtheorie konnte zwar einen gewissen Teil der Beobachtungen verständlich machen; die Abhängigkeit der Aufzehrungsgeschwindigkeit vom Druck, während gleichzeitig der Kathodenfall in der Hohlkathode praktisch konstant bleibt, war mit der Theorie nicht zu vereinen. Daher hat der Verfasser systematische Versuche zur Aufklärung des Mechanismus der Aufzehrung von Edelgasen durchgeführt¹⁾.

Die durch die Arbeiten von Alterthum, Lompe und Seeliger anscheinend geklärte Sachlage komplizierte sich erheblich 1. durch die Aufdeckung eines Nachwirkungseffektes, worüber in Teil II ausführlich berichtet werden soll und 2. dadurch, daß ohne besondere geometrische Vorsichtsmaßnahmen an den üblichen konvexen, konkaven und ebenen Elektroden Randeffekte auftreten, die, wie an dieser Stelle vorweggenommen werden soll, durch eine inhomogene Stromdichteverteilung und einen damit zusammenhängenden Materialtransport infolge der inhomogenen Zerstäubung bedingt sind (vgl. Teil III u. IV). Infolgedessen ergab sich eine Aufspaltung des Problems in zwei Hauptfragen:

A. Elementarprozeß der Aufzehrung im störungsfreien Fall homogener Stromdichte, der sich zusammensetzt aus Ioneneinschluß, Zerstäubung und Rückdiffusion mit teilweiser Wiederbefreiung des aufgezehrten Gases²⁾.

B. Mechanismus der Aufzehrung für Elektroden, die Randeffekte zeigen, speziell für Hohlkathoden, der aufgefaßt wird — wie später näher ausgeführt werden soll — als „Integral“ über den Elementarprozeß unter Berücksichtigung der durch die geometrische Konfiguration und durch die inhomogene Stromdichte bedingten inhomogenen Zerstäubung (Materialtransport).

In dieser Arbeit soll für Hohlkathoden der Mechanismus der Edelgasaufzehrung phänomenologisch geklärt werden. Es war dazu

1) Ein vorläufiger Bericht darüber erschien in *Ztschr. f. Phys.* 117. S. 651. 1941. Vgl. auch R. Seeliger, *Naturw.* 30. S. 461. 1942.

2) Über die hierbei erzielten Ergebnisse wird im einzelnen Herr W. Funk berichten.

außer Messungen der Aufzehrung noch notwendig, die Stromdichteverteilung in der Hohlkathode zu untersuchen, worüber in der Literatur¹⁾ bisher nur wenige Andeutungen vorliegen.

II. Aufzehrung

A. Versuchsmethode und Formierprozeß

Die Untersuchungsmethode konnte zunächst von Alterthum, Seeliger und Lompe übernommen werden. Es wurde die Gas-aufzehrung gleich Zahl der pro Zeit- (Stunde) und Stromeinheit (100 mA) verschwindenden Atome aus der Abnahme des Fülldrucks bestimmt. Erst die Neuentwicklung eines sicheren und in der Handhabung einfachen auch bei hohem Druck genauen Druckmeßgerätes²⁾ gestattete die Bewältigung des umfangreichen Versuchsprogramms.

Erhebliche Schwierigkeiten machte das Kathodenmaterial. Während nämlich eine bestimmte technische Eisensorte reproduzierbare Ergebnisse brachte, zeigten andere mit geringfügig anderer Zusammensetzung unreproduzierbare Verhältnisse; infolgedessen ist als Kathodenmaterial später vakuumgeschmolzenes Elektrolyteisen der Firma Heraeus verwandt worden. Doch zeigte auch dieses noch gewisse Streuungen. Wahrscheinlich beruht die hier noch beobachtete Streuung darauf, daß die als Rostschutz von der Firma verwandte Fetthaut allmählich in das Eisen hineindiffundiert und beim Ausglühen im Vakuum zu verschiedenen C-Gehalten Anlaß gibt, obwohl die Fetthaut vor jedem Versuch durch Alkohol äußerlich sauber von der Kathode abgewaschen bzw. beim Ausheizen des Rohres in ihren letzten Spuren abgepumpt wird.

Durch Beschränkung auf Neon als Edelgas und auf Eisen bzw. vakuumgeschmolzenes Elektrolyteisen als Kathodenmaterial und durch das möglichst genaue Einhalten einer schematisierten Formier- und Fülltechnik ist die Zahl der Parameter, die auf die Aufzehrung Einfluß haben können, bewußt eingeschränkt worden. Über die Formiertechnik sind einige Bemerkungen notwendig. Die Abgabe von Spuren von Fremdgasen während des Versuchs ist unbedingt zu vermeiden, anders sind reproduzierbare Ergebnisse nicht zu erwarten, da die Aufzehrung als Oberflächeneffekt naturgemäß gegen Gasbeladung der Kathodenoberfläche stark empfindlich ist.

1) A. Lompe, R. Seeliger u. E. Wolter, Ann. d. Phys. [5] **36**, S. 9. 1939; Brewer-Miller, Phys. Rev. **42**, S. 786. 1932; A. J. Parfentyev, C. R. Moscou (N. S.) **26**, S. 754. 1940.

2) W. Bartholomeyczky, Ztschr. f. techn. Phys. **21**, S. 25. 1941.

Es war also ein möglichst extremes Entgasen der Rohre notwendig, das je nach der benutzten Rohrtype in elektrischen oder gasbeheizten Öfen bei maximal 390—420° über mehrere Stunden erstreckt wurde.

Das Wesentliche des Formierprozesses ist der Glühvorgang der Kathode, da dadurch außer der Gasbeladung noch Korngröße und Oberflächenstruktur des Kathodenmaterials bestimmt werden. Obwohl mit unseren Mitteln diese 3 Größen, die auf die Aufzehrung Einfluß haben können, nicht reproduzierbar waren und wahrscheinlich überhaupt nicht absolut reproduzierbar zu gestalten sind, ergaben sich für unsere Problemstellung nur unwesentliche Streuungen bei Abänderungen des Glühvorgangs. Im allgemeinen genügte für unsere Zwecke eine Glühung von insgesamt 3—6 Stunden bei rund 1000° C.

Wie in dem vorläufigen Bericht¹⁾ ausführlich diskutiert worden war, mußte das Edelgas durch Brennen einer Entladung mit einem besonderen Kathodensystem vor dem eigentlichen Versuch gereinigt werden. Die dabei entwickelten Typen von Versuchsröhren sind dort bereits geschildert. In dem ungereinigten Gas konnte spektroskopisch kein unedles Fremdgas nachgewiesen werden. Das verschiedene Verhalten von ungereinigtem und vorgereinigtem Gas bezüglich der Aufzehrung ist durch die Empfindlichkeit der Stromdichteverteilung gegen Spuren von Verunreinigungen zu verstehen (vgl. S. 550).

B. Versuchsergebnisse

Vorbemerkung

Bei der Durchführung der Aufzehrungsmessungen wurden drei verschiedene Verfahren benutzt. Man kann, so wie es Lompe, Alterthum und Seeliger zunächst gemacht haben, die Versuchsröhren mit einem relativ hohen Druck füllen, und dann den Druckverlauf bis zum Hartbrennen verfolgen (*Dauerbrennerversuche*). Zweitens kann man durch Anbringen magnetischer Verschlüsse das Versuchsrohr mehrmals jeweils wieder auf den Ausgangsdruck füllen (*Nachfüllversuche*); dabei ist es zweckmäßig, den Ausgangsdruck nicht allzu hoch zu wählen, um die Versuchszeiten zu beschränken. Drittens kann man zwei Versuchselektrodensysteme abwechselnd so lange brennen lassen, bis eine zur Messung der Aufzehrung ausreichende Druckabnahme erfolgt ist (*Wechselversuche*).

Ehe wir ausführlich auf die Besprechung der Ergebnisse dieser drei Methoden eingehen, wollen wir die wichtigsten Tatsachen, die sich aus dem Versuchsmaterial ablesen lassen, vorwegnehmen:

1) Ztschr. f. Phys. 117. S. 651. 1941.

1. Die Aufzehrung nimmt mit abnehmendem Druck zu (Druckeffekt). Besonderheiten liegen im Gebiet höherer Drucke vor.

2. Die Aufzehrung hängt von Druck, Dauer und Stromstärke vorhergehender Entladungen ab (Nachwirkungseffekt).

3. Die mittlere Aufzehrung kann über längere Zeiten zum Stillstand kommen.

4. Die Aufzehrung zeigt besonders bei höheren Drucken starke Schwankungen, sie kann zeitweilig negativ werden, d. h. aufgezehrtes Gas wird aus der Kathode wieder befreit.

5. Die wesentlichen Grundprozesse der Aufzehrung gehorchen den allgemeinen Ähnlichkeitsgesetzen.

1. *A-p-Diagramm*

Alterthum, Lompe und Seeliger haben die Aufzehrungsgeschwindigkeit logarithmisch gegen den Druck aufgetragen und — allerdings innerhalb erheblicher Streuungen — die Druckabhängigkeit der Aufzehrung reproduzieren können. Wir wissen jetzt, daß die Aufzehrung von weiteren Parametern abhängt, so daß eigentlich zur Darstellung der Aufzehrung ein mehrdimensionales Diagramm benutzt werden müßte: über der Druck-Vorbrennzeitebene wäre die Aufzehrung aufzutragen. Auch damit wären noch nicht alle Parameter erfaßt, da ja noch Stromstärke und Druck der vorhergehenden Entladung die Aufzehrung beeinflußt. Es ist hoffnungslos und liegt nicht im Sinn unserer Problemstellung, die vollständige Aufnahme eines solchen mehrdimensionalen Diagramms durchzuführen. Man kann nur einige Schnitte durch das Diagramm legen, etwa bei konstantem Druck die Vorbrennzeit variieren (Nachfüllversuche) oder bei Vorbrennzeit 0 den Druck (Wechselversuche). Jedoch sind stets nur recht grobe Annäherungen an diese idealen Schnitte durch das mehrdimensionale Diagramm zu realisieren. Eine andere Möglichkeit besteht darin, daß man das mehrdimensionale Diagramm auf die Druck-Aufzehrungsebene projiziert; experimentell würde das bedeuten, man trägt ohne Rücksicht auf die übrigen Parameter die Meßergebnisse über dem Druck auf. Wir erhalten dann einen gewissen Überblick über die Sachlage, wobei zu beachten ist, daß die Streuungen auf die nicht berücksichtigten Parameter zurückzuführen sind.

In Abb. 1 ist die größte Zahl der Ergebnisse unserer Messungen ohne Beachtung des speziellen Versuchsverfahrens eingetragen. Es wurde so vorgegangen, daß aus der von einem Versuchsrohr zunächst aufgenommenen Druck-Zeitkurve — Beispiele werden wir

später genau diskutieren — durch graphische Differentiation an geeigneten Punkten der Wert von $\frac{dp}{dt}$ bestimmt wurde, der dann mittels des Rohrvolumens nach der Formel

$$\frac{dn}{dt} = 3,3 \cdot V \cdot \frac{dp}{dt} \cdot 10^{16} (\text{At/h})^{-1}$$

auf die Aufzehrungsgeschwindigkeit umgerechnet wurde. Die Meßpunkte liegen in einem Band, dessen Breite in der Aufzehr-

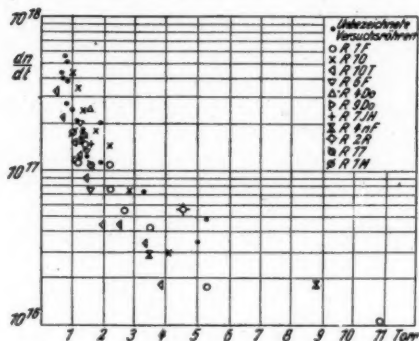


Abb. 1. A-p-Diagramm,
Aufzehrungsgeschwindigkeit als Funktion des Druckes

geschwindigkeit den Faktor 2—5 ausmacht. Daß für höhere Drucke (größer als 5 Torr) verhältnismäßig wenige Meßpunkte eingetragen sind, ist erstens darauf zurückzuführen, daß in diesem Gebiet die Versuche außerordentlich zeitraubend sind und trotz Herabsetzung des Rohrvolumens auf das glasbläserische Minimum immerhin zu einigen 1000 Brennstunden führen und daß zweitens die übrigen nicht berücksichtigten Parameter hier besonders großen Einfluß haben, so daß so starke Streuungen auftreten, daß eine Darstellung im A-p-Diagramm der Sachlage nicht mehr angemessen erscheint.

2. Nachwirkungseffekt

Versuchsröhren, die mehrmals über magnetische Verschlüsse nach dem Hartbrennen wieder auf den Ausgangsdruck gefüllt werden konnten, zeigten, daß mit wachsender Brennzeit die Aufzehrungsgeschwindigkeit abnimmt und sich einem Endwert nähert. Ein Beispiel hierfür ist in Abb. 2 dargestellt. In der Abb. zeigen die

1) Alterthum, Lompe u. Seeliger, a. a. O. S. 408.

Abb. 2.
Nachfüllversuch,
zeitlicher Druckverlauf.
Die Zahlen
geben die Nummer
des Versuches an

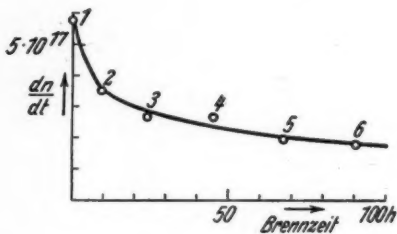
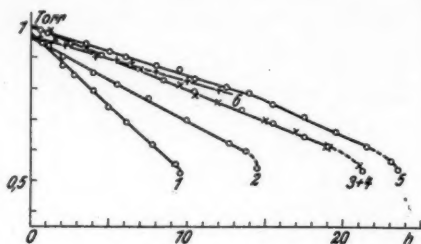


Abb. 3.
Nachfüllversuch,
Aufzehrungsgeschwindigkeit
als Funktion der Brennzeit

Abb. 4.
Zeitlicher Druckverlauf
als Beispiel
für sprunghafte Änderungen
der Aufzehrungsgeschwindigkeit

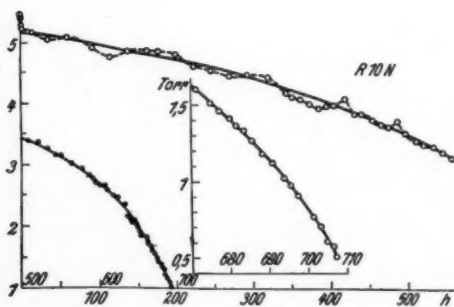
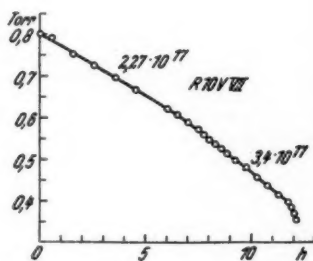


Abb. 5.
Zeitlicher Druckverlauf
als Beispiel
für kontinuierliche
Änderungen
und Schwankungen
der Aufzehrungs-
geschwindigkeit

6 Druckzeitkurven bis auf eine Ausnahme einen exakt linearen Verlauf, so daß also die Aufzehrungsgeschwindigkeit von 1—0,5 Torr konstant ist. Nr. 5 hat bei 0,8 Torr einen Knick, auf den wir besonders aufmerksam machen wollen. Die Abb. 3 zeigt die Aufzehrungsgeschwindigkeit als Funktion der Brennzeit. Die Änderung der Aufzehrungsgeschwindigkeit mit der Dauer vorangehender Entladungen, die in dem vorläufigen Bericht als „Zeiteffekt“ bezeichnet worden war, ist besser durch das Wort „Nachwirkungseffekt“ charakterisiert. Die Konstanz der Aufzehrungsgeschwindigkeit von 1—0,5 Torr — Lompe hatte sogar Konstanz von ungefähr 3—0,5 Torr gefunden — wird im allgemeinen nur dann beobachtet, wenn das Rohrvolumen relativ klein ist, bei größerem Volumen setzt sich die Kurve, soweit keine Schwankungen vorliegen, besonders unterhalb 1 Torr aus geraden Stück mit zufällig verteilten Knickpunkten zusammen (vgl. Abb. 4) oder aber ist stetig gekrümmt (Abb. 5).

3. Wechselversuche

Während bei den Nachfüllversuchen und den Dauerbrennversuchen die Druckabnahme des Versuchsrohres durch Brennen eines einzigen Elektrodenystems hervorgerufen wurde und die Aufzehrungsgeschwindigkeit demgemäß quasi-kontinuierlich gemessen wurde, wurden in diesen Versuchsserien zwei gleichen Elektroden-systems abwechselnd gebrannt, und zwar jeweils so lange, bis eine zur Messung der Aufzehrungsgeschwindigkeit ausreichende Druckabnahme erfolgt war¹⁾. Die Bedingungen sind völlig andere als in den Dauerbrennversuchen, die Druckmessung beginnt für einen Punkt des A-p-Diagramms mit einer jeweils rund halb so großen Brennzeit wie bei den Dauerbrennversuchen. In der Tat hat jetzt die Kurve im A-p-Diagramm, wie als Beispiel Abb. 6 belegen möge,

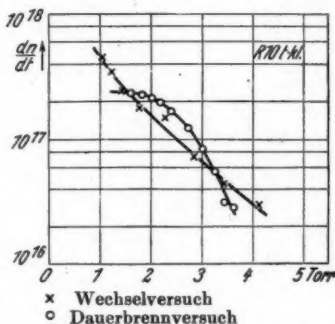


Abb. 6. A-p-Diagramm für Wechsel- und Dauerbrennversuch

1) Eine andere von den Ergebnissen der Stromdichteverteilungsmessungen angeregte Versuchsmethode würde umgekehrt darin bestehen, daß man durch sehr große Totvolumina der Versuchsrohren, die zur Messung allerdings abgeschmolzen werden müßten, die Brennzeiten vor jeder Druckmessung wesentlich heraufsetzt. Versuche dieser Art sind beabsichtigt, werden aber äußerst viel Zeit beanspruchen.

einen grundsätzlich anderen Verlauf. Während wir, wie auch schon früher Alterthum, Lompe und Seeliger bei den Dauerbrennversuchen näherungsweise Konstanz der Aufzehrungsgeschwindigkeit unterhalb eines gewissen Druckes fanden, nimmt in den Wechselversuchen die Aufzehrungsgeschwindigkeit mit abnehmendem Druck dauernd zu. Die Aufzehrungsgeschwindigkeit ist während der Brennphase des Elektrodensystems konstant und springt, nachdem das zweite Elektrodensystem den Druck um nur wenige Hundertstel bis Zehntel Torr erniedrigt hat, auf einen höheren Wert.

4. Das Gebiet höherer Drucke (Stillstandseffekt).

Die Untersuchungen im Gebiet höherer Drucke, die wegen der geringen Aufzehrungsgeschwindigkeit äußerst langwierig sind, sind hinsichtlich der Auswertung der Meßkurven wegen der Schwankungen der Aufzehrung mit Schwierigkeiten verknüpft. Im Diagramm (Abb. 1) sind die über mehrere Schwankungen (vgl. Abb. 5) graphisch ermittelten Mittelwerte der Aufzehrungsgeschwindigkeit eingetragen, soweit nicht Besonderheiten des Kurvenverlaufs eine derartige Auswertung überhaupt als sinnlos erscheinen lassen. Wenn der Ausgangsdruck in der Gegend von 8–10 Torr lag, nimmt die mittlere Aufzehrungsgeschwindigkeit von relativ hohen Werten an zunächst bis fast auf den Wert Null ab, und steigt dann wieder an (Stillstandseffekt). Über mehrere 100 Stunden schwankt der Druck unregelmäßig, ehe die Aufzehrung wieder einsetzt. Der mittlere Druck, bei dem der Stillstand eintritt, liegt einige Torr tiefer als der Ausgangsdruck. Geht man zu tieferen Ausgangsdrücken über, so verschwindet der Stillstandseffekt; zunächst nimmt die Zeitdauer des Stillstandes der Aufzehrung ab und schließlich ist bei einem Fülldruck in der Gegend von 5 Torr als Andeutung dieses Effektes nur noch gelegentlich ein Wendepunkt in der Aufzehrungskurve zu beobachten.

5. Schwankungen in der Gasaufzehrungsgeschwindigkeit

Die Aufzehrungsgeschwindigkeit wechselt dauernd ihre Größe, bei höheren Drücken nimmt sie sogar zeitweilig negative Werte an, so daß von der Entladung wieder Gas aus der Kathode befreit wird. Mit abnehmendem Druck wird die Amplitude der Schwankungen kleiner. Während sie im Druckgebiet von 9 Torr noch fast 1 Torr beträgt, ist sie bei 1 Torr bereits auf die Größenordnung ein hundertstel Torr abgeklungen. Aus unseren Ergebnissen läßt sich mit einigem Vorbehalt ablesen, daß mit abnehmendem Druck die Dauer der Schwankungen von einigen Zehnern Stunden bis auf

Bruchteile von Stunden abnimmt. Erschwert wird der Überblick dadurch, daß größere und kleinere Schwankungen sich meistens überlagern und daß es aus experimentellen Gründen unmöglich ist, die Meßpunkte ausreichend dicht zu legen.

6. Das Ähnlichkeitsgesetz der Gasaufzehrung

Versuche mit verschiedenen großen Hohlkathoden, die alle daselbe Verhältnis von Länge zum Durchmesser besaßen, wurden durchgeführt, um die Gültigkeit der allgemeinen Ähnlichkeitsgesetze¹⁾ bezüglich der Gasaufzehrung zu prüfen. Die Aufzehrungsgeschwindigkeit ist, wenn man vom Einfluß des Materials und der Vorgeschichte der Kathoden — darunter ist zu verstehen Formierung durch Stromstärke, Dauer und Druck vorhergehender Entladungen — absieht, nur eine Funktion des Druckes. Der spezielle Mechanismus der Aufzehrung ist für die Gültigkeit des Ähnlichkeitsgesetzes belanglos, wir brauchen nur zu wissen, daß Druck, Kathodenfall, Rückdiffusion und Stromdichteverteilung die einzigen Komponenten sind, die die Gasaufzehrung bestimmen²⁾. Stromdichteverteilung und Rückdiffusion sind dem allgemeinen Ähnlichkeitsgesetz unterworfen, d. h., vergrößert man die Hohlkathoden geometrisch ähnlich um den Faktor a , so muß der Druck um den Faktor a verkleinert werden, um gleiche Verhältnisse herzustellen. Da bei einer solchen Ähnlichkeitstransformation der Kathodenfall erhalten bleibt, wenn Stufenprozesse und dergleichen keine wesentliche Rolle spielen und wenn zudem keine Störungen thermischer Art auftreten, müßte die Gasaufzehrung konstant bleiben. Da bei der Ähnlichkeitstransformation die Stromstärke erhalten bleiben sollte, sind gerade beim Übergang zu kleineren Elektroden thermische Störungen zu erwarten. Nun hat Lompe gefunden, daß die Gasaufzehrung bezogen auf gleiche Stromstärke in einem gewissen Bereich der Stromstärke (20—200 mA) von dieser unabhängig ist. Es war also zu hoffen, daß man bei der Herabsetzung der Stromstärke für die verkleinerte Elektrode auf ein thermisch erträgliches Maß den richtigen Gasaufzehrungswert erhielt. Für die Kathodendurchmesser 10, 17 und 25 mm wurden die Belastungsstromstärken 30, 100 und 200 mA gewählt. Die Versuche ergaben tatsächlich in 3 von 4 Fällen den erwarteten Einfluß³⁾; im A-p-Diagramm liegen die Meßpunkte der

1) A. v. Engel u. M. Steenbeck, Elektrische Gasentladungen Bd. 2 1934. S. 95 ff.

2) Genaueres über diesen Punkt vgl. Teil V.

3) Im vierten Versuch machten sich offenbar störende Nachwirkungen und Materialeinflüsse bemerkbar.

kleineren Elektrodentype jeweils höher als die der größeren Type. Theoretisch müßte die auf gleiche Stromstärke bezogene Aufzehrungsgeschwindigkeit über $p \cdot d$ aufgetragen für die 3 benutzten Kathodendurchmesser auf derselben Kurve liegen. Bemerkenswert ist, daß der tiefste Druck bis zu dem die Aufzehrung regulär verläuft und der dadurch gekennzeichnet ist, daß unterhalb dieses Druckes die Entladung nicht mehr im Inneren der Hohlkathode, sondern außen ansetzt, außerordentlich gut dem Ähnlichkeitsgesetz $p \cdot d = \text{const.}$ gehorcht¹⁾; vgl. Tab.

Kathodendurchmesser . .	d	10	17	25	mm
Grenzdruck	p	0,61	0,38	0,25	Torr
	$p \cdot d$	6,1	6,3	6,25	mm · Torr

Als weitere Stütze für die Gültigkeit des Ähnlichkeitsgesetzes können wir die Beobachtung heranziehen, daß der Kathodenfall für die benutzten Hohlkathodentypen bis auf wenige Volt übereinstimmt in dem Gebiet, wo der Kathodenfall vom Druck unabhängig ist, und der Anstieg jeweils ungefähr bei homologen Drucken erfolgt. Eine exakte experimentelle Bestätigung des Ähnlichkeitsgesetzes für die Gasaufzehrung auch bei Gültigkeit der Voraussetzungen über Stufenprozesse und thermische Störungen ist wegen des Nachwirkungseffektes und des Materialeinflusses nicht zu erwarten. Immerhin können wir aus unseren Ergebnissen mit einiger Sicherheit schließen, daß die wesentlichen Grundprozesse der Gasaufzehrung dem Ähnlichkeitsgesetz gehorchen.

III. Materialwanderung in der Hohlkathode

Die Entwirrung und physikalische Deutung der in Teil II beschriebenen Beobachtungsergebnisse gelingt erst, wenn Beobachtungen anderer Art hinzugenommen werden. Erst die Tatsache, daß in der Hohlkathode während des Brennens eine Materialwanderung erfolgt, zusammen mit der Aufklärung der Ursachen dieser Materialwanderung gibt den Schlüssel zum Verständnis unserer und der früher von Alterthum, Lompe und Seeliger gefundenen Versuchsergebnisse, insbesondere der bis jetzt jeder Erklärung unzugänglichen Beobachtung, daß die Gasaufzehrung in dem Gebiet, in dem der Kathodenfall praktisch konstant ist, vom Druck abhängt, während sie bei tieferem Druck, wo der Kathodenfall schon ansteigt, näherungsweise druckunabhängig ist.

1) Vgl. die Arbeit C. C. van Voorhis u. A. G. Shenstone, Rev. sci. Instrum. 12. S. 257. 1941, deren Inhalt mir nur als kurzer Bericht zugänglich war.

A. Allgemeine Bemerkungen und Methodik

Die Materialwanderung ist ein im einzelnen schwer übersehbarer Vorgang, für den im wesentlichen die durch eine inhomogene Stromdichteverteilung bewirkte inhomogene Zerstäubung des Kathodenmaterials und die Diffusion der abgestäubten Metallteilchen verantwortlich sind. An gewissen Teilen der Kathodenfläche, wo offenbar die Stromdichte klein ist, lagert sich infolge Diffusion Material ab, das an anderen Stellen mit hoher Stromdichte abgestäubt worden ist, weil zwischen den Stellen hoher und geringer Stromdichte ein Dichtegefälle des abgestäubten Metaldampfes besteht und deshalb ein

Diffusionsstrom sich ausbildet. Man kann (Abb. 7, 8, 9) an einer aufgeschnittenen Hohlkathode die Stellen starker Zerstäubung von den bestäubten unterscheiden. Die zerstäubten Stellen machen auf den Beschauer denselben Eindruck wie ein stark geätztes Metall. Die Ursache für das Herausarbeiten der Kristallstruktur durch die Entladung hat man darin zu sehen, daß die verschiedenen Kristallflächen verschiedene Zerstäubungsgeschwindigkeit haben müssen, was auf die verschiedenen Ablösearbeiten an den einzelnen Kristallflächen hinweist. Die bestäubten Stellen zeigen einen matten Glanz, die mikroskopische Betrachtung enthüllt eine feinwellige bis körnige Struktur, außerdem



Abb. 7. Oberflächenbild einer Hohlkathode nach 200 Std. Brennzeit bei 1,5–0,5 Torr und 100 mA



Abb. 8. Oberflächenbild mit Boden einer Hohlkathode nach 300 Brennstunden bei 7 Torr mit 100 mA

ist gelegentlich noch zu erkennen, daß Stellen, die vorher stark zerstäubt waren, nachträglich wieder bestäubt worden sind. Der Überblick über die Vorgänge bei der Materialwanderung und die Auswertung der experimentellen Befunde wird überhaupt dadurch wesentlich erschwert, daß offenbar zufällige Inhomogenitäten im Kathodenmaterial, etwa bedingt durch geringfügige Verschiedenheiten in den Verunreinigungen (höherer Kohlenstoffgehalt) und die durch die Herstellung unvermeidlich hereingebrachten geometrischen Abweichungen von der mathematischen Zylinderform (z. B. Riefelungen und Schweißnaht) das Zerstäubungsbild in unübersichtlicher



Abb. 9. Gedrückte Elektroden mit ebenem und halbkugeligem Boden nach 300 bzw. 450 Std. Brennzeit 1—0,5 Torr mit 100 mA

Weise beeinflussen und gegenüber dem Idealfall verzerren. Auch die Benutzung von Hohlkathoden, die aus einem Stück Elektrolyt-eisenblech gedrückt waren¹⁾, wo also die geometrischen Inhomogenitäten auf das geringste Maß herabgesetzt waren, ergab keineswegs ideale, übersichtliche Verhältnisse (Abb. 9).

Um die Druckänderung durch Gasaufzehrung möglichst herabzusetzen, wurden die Volumina der Entladungsgefäße auf ungefähr 1000—1500 cm³ Inhalt gebracht. Durch geeignete Anordnung war es möglich, bis zu 16 magnetische Verschlüsse an das kugelförmige Entladungsgefäß anzubringen und im Gasofen mitauszuheizen. Je nach dem Druck erstreckt sich die Versuchsdauer von einigen 100 bis mehreren 1000 Brennstunden, dabei mußten die Versuchsrohren fortlaufend bezüglich der Brennspannung und des Druckes kontrolliert werden. Auf genaue Druckmessung wurde hierbei verzichtet; der Druck kann nach einiger Übung jeweils aus dem

1) Hersteller war die Firma Hans Locht, Berlin.

Farbton¹⁾ der kathodischen Entladungsteile hinreichend genau geschätzt werden.

B. Versuchsergebnisse

Von besonderer Bedeutung für die Deutung unserer Aufzehrungsmessungen sind die Befunde, die sich beim Vergleich der Oberflächenbilder von Kathoden ergeben, die bei verschiedenen Drucken gebrannt haben (vgl. Abb. 7 und 8). Im tiefen Druckgebiet unterhalb 4 Torr ist im Mittel — über die Verhältnisse beim Boden wird weiter unten zu sprechen sein — das weiter im Inneren liegende Gebiet mehr

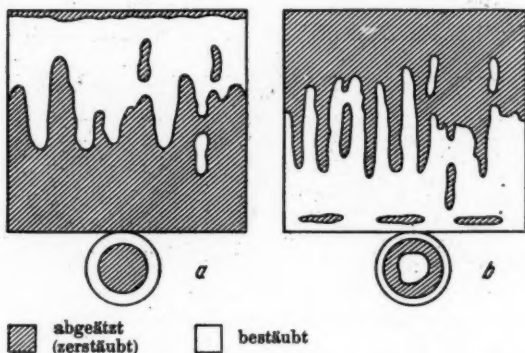


Abb. 10. Schematische Darstellung der Zerstäubungsverhältnisse in einer Hohlkathode:

a) tiefes Druckgebiet (unter 3 Torr), b) hohes Druckgebiet (über 4 Torr)

abgeätzt. Bei hohem Druck (größer als 5—6 Torr) sind die Verhältnisse umgekehrt. Das Randgebiet ist abgeätzt, während der innere Teil bestäubt ist (vgl. die schematische Skizze Abb. 10).

Im übrigen gilt das Ebengesagte nur in ganz groben Zügen. So ist im hohen Druckgebiet, wie an Abb. 8 deutlich zu erkennen ist, nahe am Boden noch ein schmaler Ring abgeätzt, der allerdings oft nur durch einzelne abgeätzte Flecken angedeutet und nicht voll ausgebildet ist.

Besondere Verhältnisse liegen beim Boden vor (Abb. 11). Im Gebiet tiefer Drucke wird der Boden stets kreisrund abgeätzt, und zwar bis auf 1—2 mm Abstand vom Bodenrand. Fast genau in der Mitte des Bodens entsteht nach ausreichend langer Versuchszeit

1) Die Ursache der Änderung des Farbtons der kathodischen Entladungsteile liegt an dem mit abnehmendem Druck stärker hervortretenden Eisenspektrum.

ein Loch, das sich allmählich so stark vergrößert, daß fast der ganze Boden fortgestäubt wird¹⁾. Bei hohem Druck sind die Vorgänge der Materialwanderung am Boden besonders verwickelt. Es fanden sich hier nämlich je nach der Versuchszeit entweder kreisrund abgeätzte (kleine Versuchszeit) oder in Form eines konzentrischen Ringes mit bestäubter Mitte (längere Versuchszeit) abgeätzte Böden vor. Bei mikroskopischer Untersuchung zeigte sich im zweiten Fall, daß auch hier die Mitte zunächst abgeätzt und erst nachträglich wieder zugestäubt worden war. Wenn — mehrere 1000—10000 Brennstunden sind dazu erforderlich — ein Loch im Boden entstand, so lag es stets exzentrisch und war im Gegensatz zu den kreisrunden Löchern im tiefen Druckgebiet linsenförmig.



Abb. 11. Links: Boden einer Hohlkathode mit linsenförmigem Loch und bestäubter Mitte nach 12000 Brennstunden bei 6 Torr.
Rechts: Boden einer Hohlkathode nach 120 Brennstunden bei 2—0,5 Torr

Interessante Ergebnisse zeigen die Oberflächenbilder von Hohlkathoden mit halbkugelförmigem Boden, die aus einem Stück gedrückt worden waren. Hier ist bei tiefem Druck (vgl. Abb. 9) im Gegensatz zum rechteckigen Boden der ganze Boden dick bestäubt. Parallel damit geht in diesem Druckgebiet eine Erhöhung der Aufzehrungsgeschwindigkeit auf das $1\frac{1}{2}$ —3 fache der normalen Werte. Regelmäßig ist auch der Innenwinkel am Zylinderboden, und zwar besonders dick, bestäubt. Dabei war es gleichgültig, ob der Innenwinkel scharf, d. h. Zylinderwand und Boden aufeinander senkrecht standen, oder ob wie bei den gedrückten Elektroden ein stetiger Übergang in der Krümmung zwischen beiden Teilen erfolgte.

1) H. Alterthum u. A. Lompe, Ztschr. f. techn. Phys. 19. S. 116. 1938, wiesen schon auf das Loch im Boden hin. Wir fanden außerdem, daß gelegentlich noch vorher ein Loch in der Seitenwand der Hohlkathode auftrat.

Bei der Betrachtung der Oberflächenbilder von Hohlkathoden und Hohlzylindern aus gebogenem Eisenblech fällt eine Längsstreifung auf (Abb. 7 und 8). Die Zonen abgeätzten und bestäubten Gebietes sind angenähert parallel. Offenbar hängt diese Erscheinung mit der Tatsache zusammen, daß beim Biegen von Eisenblech im kalten Zustand stets Riefelungen auftreten; die Kathode ist aus Teilstücken verschiedenen Krümmungsmaßes zusammengesetzt und es hat den Anschein, als ob die Gebiete stärkerer Krümmung im allgemeinen bevorzugt bestäuben. Dafür sprechen auch die Beobachtungen an den halbkugelförmigen Böden und dem Winkel zwischen Boden und Zylinderwand.

IV. Stromdichteverteilung

A. Allgemeine Bemerkungen und Methodik

Wir haben bereits angedeutet, daß die Materialwanderung in der Hohlkathode — nebenbei sei bemerkt, daß sie in allen ebenen und konkaven Elektroden mehr oder weniger deutlich ebenfalls auftritt und daß wie Funk gefunden hat, nur kugelförmige Elektroden praktisch frei von dieser Erscheinung sind — verursacht wird durch die inhomogene Verteilung der Stromdichte. Es ist also zum Verständnis der Erscheinungen bei der Materialwanderung notwendig, die Stromdichteverteilung zu messen. Hierbei waren erhebliche experimentelle Schwierigkeiten zu überwinden, die darauf beruhen, daß durch die Rückdiffusion des zerstäubten Kathodenmaterials die Isolation zwischen den einzelnen Teilen der aus mehreren Ringen aufgebauten Elektrode überbrückt wird. Wir haben nach mehreren vergeblichen Versuchen die Ringe einzeln gehalten und durch Luftspalte von 2—3 Zehntel mm Größe voneinander isoliert. Das Entgasen der Elektrode mußte in zwei Etappen geschehen, da beim Ausglühen im Hochfrequenzfeld die Halterungen — es wurden derer 9 benutzt — sich verbiegen. Nach dem ersten Entgasen wurde die Elektrode nachgerichtet und dann erst in das Versuchsrohr eingeschmolzen. Das zweite Entgasen im Versuchsrohr konnte, um ein nochmaliges Verziehen der Halterungen zu vermeiden, nur bei schwacher Rotglut durchgeführt werden.

Die Hohlkathode von 50 mm Länge war in 7 Ringe von 7 mm Höhe und zwei flächengleiche konzentrische Bodenteile aufgeteilt. (Die Bezeichnung der einzelnen Teile ist aus der Skizze der Abb. 15 ersichtlich.) Zur Messung der Stromdichteverteilung haben wir in die Teilkreise je einen Widerstand von 1 Ohm gelegt, an den jeweils im Nebenschluß ein Millivoltmeter der Firma Siemens mit einem Innenwiderstand von 750 Ohm zur Strommessung gelegt

werden konnte. Durch den Nebenschluß des Instruments wurde der Widerstand im Teilkreis um weniger als 0,1% geändert, so daß Störungen in der Stromdichteverteilung nicht zu erwarten waren.

B. Versuchsergebnisse

Ehe wir auf das wesentliche Ergebnis bezüglich der Druckabhängigkeit der Stromdichteverteilung eingehen können, müssen wir zunächst einige Beobachtungen schildern, die ihrerseits die Versuchsmethodik wieder beeinflußt haben.

Bei frisch eingefülltem Gas ändert sich die Stromdichteverteilung so rasch, daß es wegen des Meßverfahrens unmöglich war, die momentane Verteilung zu bestimmen¹⁾. In der Zeit, die wir

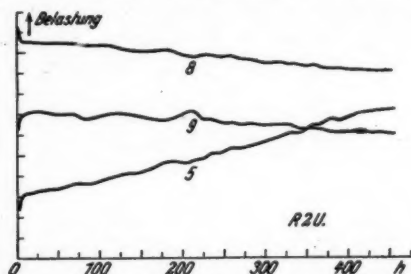


Abb. 12. Zeiteffekte und Schwankungen der Stromdichteverteilung. Gesamtbelastung 40 mA, Einzelbelastung im willkürlichen Maßstab

benötigten, um eine Verteilungskurve aufzunehmen, ändert sich die Verteilung bereits merklich. Allerdings geht die Änderungsgeschwindigkeit — bei höherem Druck langsamer — bald zurück und es stellt sich je nach dem Druck nach kürzerer oder längerer Zeit ein quasi-stationärer Endzustand ein, d. h., die Stromdichteverteilung schwankt um eine gewisse mittlere Verteilung und verschiebt sich außerdem nach einer wesentlich geringeren Zeitkonstanten. Abb. 12 zeigt die Belastung dreier Ringe als Funktion der Zeit bei konstanter Stromstärke und konstantem Druck. Die Gesamtbelastung der unterteilten Kathode betrug 40 mA.

1) Hier liegt die Ursache des auf S. 537 erwähnten und früher a. a. O. besprochenen verschiedenen Verhaltens von vorgereinigtem und nicht vorgereinigtem Gas bezüglich der Aufzehrungsgeschwindigkeit. Spuren von Verunreinigungen beeinflussen naturgemäß die Kathodenoberfläche so stark, daß die Stromdichteverteilung für ungereinigtes und vorgereinigtes Gas verschieden ausfällt.

Eine Beobachtung von grundsätzlicher Bedeutung wurde stets gemacht, wenn der Druck im Versuchsrohr geändert wurde, gleichgültig in welchem Sinn und um welchen Betrag: Die Stromdichteverteilung nach der Druckänderung hat qualitativ, wenn auch nicht quantitativ denselben Verlauf wie vorher, ehe sie in die dem betreffenden Druck zugeordnete quasi-stationäre Verteilung übergeht. Besonders in die Augen springend ist der Effekt bei großen Druckänderungen, wie an einem Beispiel gezeigt werden soll.

Abb. 13 zeigt in Kurve *a* die Stromdichteverteilung, die sich als quasistationäre bei 0,5 Torr ergeben hatte. Die Kurven *b*, *c*, *d* veranschaulichen die Änderung der Stromdichteverteilung, die eintraten, als der Druck durch Nachfüllen auf 6,9 Torr erhöht wurde. Man erkennt, daß die Stromdichte für den neu eingestellten Druck zunächst qualitativ denselben Verlauf hat wie vorher (Kurve *b*), auch wenn die Stromdichte für den neuen Druck, wie die Kurven *c* und *d* zeigen, später einen prinzipiell anderen Verlauf hat. Dieses „Erinnerung“ der Hohlkathode an die vorhergehende Stromdichteverteilung kann, wenn man bei neuem Druck die Kathode nicht ausreichend lange einbrennen läßt — mehrere

100 Stunden können bei hohem Druck dafür notwendig sein —, die Meßergebnisse für die Druckabhängigkeit völlig fälschen.

Die Ergebnisse der Stromdichteverteilungsmessungen, die nunmehr infolge der Vorsichtsmaßnahmen außerordentlich zeitraubend wurden und wegen der langen Brennzeit mannigfachen experimentellen Störungen ausgesetzt waren, lassen sich kurz wie folgt zusammenfassen:

Bei tiefem Druck liegt das Maximum der Stromdichte weit im Inneren der Hohlkathode — kann in gewissen Fällen sogar auf der Bodenmitte liegen —, mit zunehmenden Druck verschiebt es sich

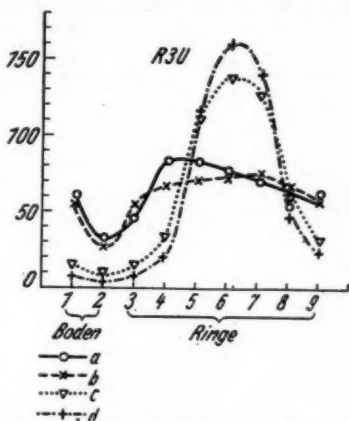


Abb. 13. Erinnerungseffekt der Stromdichteverteilung bei einer Druckänderung.

a) Quasi-stationäre Stromdichteverteilung bei 0,5 Torr.

b) Anfängliche Stromdichteverteilung beim Auffüllen des Druckes auf 6,9 Torr.

c) Stromdichteverteilung nach 12 Std.

d) Stromdichteverteilung nach 24 Std.

Die Gesamtbelastung betrug 40 mA

zum Rand, während der Boden und das Innere praktisch stromfrei wird (vgl. Abb. 14 a, b, c). Aus der Abb. 14 c erkennt man ferner,

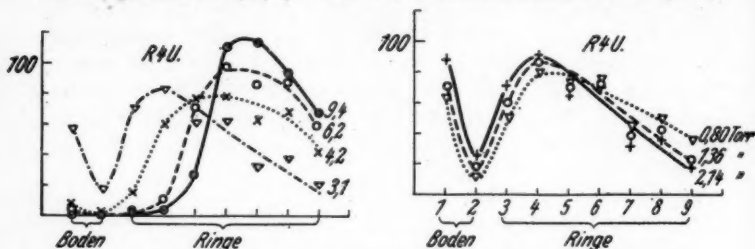


Abb. 14 a, b. Quasi-stationäre Stromdichteverteilung, Druck als Parameter. Die Gesamtbelastung betrug 40 mA

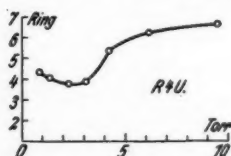


Abb. 14 c. Verschiebung der Lage des Maximums der Stromdichteverteilung mit dem Druck.

Die Gesamtbelastung betrug 40 mA

daß nach tiefen Drucken hin wieder eine geringe Verschiebung des Maximums nach vorn stattfindet. Bei einer anderen Versuchsserie lag derselbe Gang vor, nur

waren dort wegen zufällig größerer Materialinhomogenitäten die einzelnen Verteilungskurven unübersichtlicher. Hier verschob sich das Maximum bei hohem Druck (12 Torr) sogar völlig bis zum Rand. Abb. 15 zeigt in anderer Darstellungsweise als Abb. 14 die Ergebnisse dieser Versuchsserie. Als Funktion des Druckes sind die prozentualen Belastungen der Bodenmitte und einiger Ringe aufgetragen. Die Belastung betrug hier wieder 40 mA.

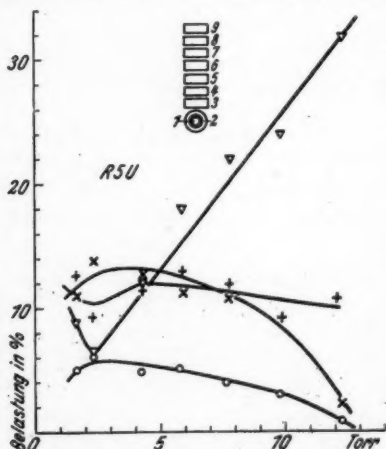


Abb. 15. Prozentuale Belastung von einigen Kathodenteilen als Funktion des Druckes. Die Gesamtbelastung betrug 40 mA

Eine Besonderheit bildet die Ecke zwischen Boden

und Zylinder, die, wie erwähnt, auch durch dicke Bestäubung ausgezeichnet ist. In der Ecke ist die Stromdichte besonders klein, kann allerdings bei hohem Druck die Belastung der Bodenmitte überschreiten. Im übrigen müßte hier, um ein einigermaßen sicheres Bild der Stromdichteverteilung zu bekommen, die Unterteilung der Hohlkathode wesentlich weiter getrieben werden. Nach den Beobachtungen beim Materialtransport scheint hier die Inhomogenität der Stromdichteverteilung besonders groß zu sein.

C. Diskussion

Wenn eine homogene Kathodenoberfläche vorausgesetzt wird, d. h., wenn die gasentladungsphysikalischen Grundprozesse an der Kathodenoberfläche [Elektronenbefreiung durch Ionenstoß (γ -Effekt), durch Photonen der Entladung (β -Effekt) und durch Metastabile (ϵ -Effekt)] für alle Kathodenelemente gleich sind, so kann die Stromdichteverteilung nur durch die Geometrie der Kathode und durch Diffusionsvorgänge der an den Elementarprozessen teilnehmenden Teilchen bestimmt werden. Sehen wir von Metastabilen und Photonen ab, so ist vor auszusehen, daß der Entzug von Ladungsträgern durch Herausschmelzen aus der Kathode eine Herabsetzung der Stromdichte am äußeren Rand bewirken wird, und zwar wegen erhöhter Diffusion besonders bei tieferen Drucken. Bei höherem Druck wird dieser Effekt zurückgehen und die Stromdichte müßte gleichmäßiger verteilt werden. Daß die Stromdichte im Gegenteil jetzt im Inneren abnimmt und außen zunimmt, liegt daran, daß die typische Hohlkathodenwirkung allmählich verlorengeht, die bekanntlich darauf beruht, daß die Fallräume gegenüberliegender Kathodenelemente sich durch Zuwanderung von Ladungsträgern gegenseitig beeinflussen¹⁾. Nicht mehr zum eigentlichen Kathodenfallgebiet gehörende Entladungsteile erfüllen dann einen gewissen Querschnitt der Hohlkathode; die Strombahnen, die in das Innere der Hohlkathode führen, haben einen höheren Spannungsabfall zu tragen, als die Strombahnen zum Rand, infolgedessen sinkt die Stromdichte im Inneren. Auf die Weise können wir wenigstens qualitativ das Verhalten der Stromdichte verstehen, wenn auch eine Theorie der Stromdichteverteilung mangels einer quantitativen Theorie des Kathodenfalls für Hohlkathoden zur Zeit nicht möglich ist.

Dazu kommt der eine genaue Betrachtung beträchtlich erschwerende Umstand, daß während des Brennens der Entladung,

¹⁾ Vgl. A. Lompe, R. Seeliger u. E. Wolter, *Ann. d. Phys.* [5] 36. S. 9. 1939.

wie wir nun übrigens nicht nur aus der zeitlichen Änderung der Stromdichteverteilung wissen, sondern auch aus dem zeitlichen Verhalten des Kathodenfalls erschließen können, die Entladung allmählich die Konstanten γ , δ und ϵ des Kathodenmaterials ändert. Zur Zeit in unserem Institut durchgeführte Untersuchungen über den Kathodenfall haben als vorläufiges Ergebnis gezeigt, daß bestäubte Kathoden einen höheren Kathodenfall als von der Entladung abgeätzte besitzen. Es wird also die von der ungleichmäßigen Stromdichteverteilung hervorgerufene Materialwanderung, die ja in Zerstäubung und Bestäubung verschiedener Kathodenteile besteht, eine weitere dauernde Veränderung der Stromdichteverteilung zur Folge haben, die ihrerseits wieder den Materialtransport verändert, und es ist nicht zu übersehen, ob sich schließlich überhaupt ein stationärer Endzustand in der Stromdichteverteilung einstellen wird. Unsere Versuche geben darüber nur den Aufschluß, daß, wenn überhaupt ein Endzustand eintritt, dieser bei höherem Druck z. B. sich erst nach Brennzeiten von einigen Zehnern bis Hundertern von Stunden einstellen wird. Eine endgültige Entscheidung aus dem Versuchsmaterial zu treffen, ist zur Zeit noch nicht möglich, da parallel mit dem Einbrennen naturgemäß ein Aufzehrungsvorgang stattfindet, der eine Druckänderung zur Folge hat, so daß leider wieder zwei Effekte sich überlagern. Es liegt allerdings nahe anzunehmen und hat sich als Arbeitshypothese bewährt, daß zu jedem Druck eine bestimmte wohldefinierte Stromdichteverteilung (ideale Verteilung) gehört, die sich nach ausreichend langer Brennzeit unter konstantem Druck einstellen würde.

Bei dieser Gelegenheit wollen wir auf Beobachtungen über zeitliche Änderungen des Kathodenfalls eingehen, die uns zunächst unverständlich waren und auf die jetzt, nachdem wir die Vorgänge bei der Stromdichteverteilung und des Materialtransports kennen, neues Licht fällt. Nach Inbetriebnahme eines neuen Rohres oder eines neuen Elektrodensystems sinkt die Brennspannung stets um einige Zehner Volt im Verlauf weniger Stunden, darauf erheblich langsamer, um schließlich je nach dem Druck nach Zehnern bis Hundertern von Stunden konstant zu werden. Wurde nun, wie bei den Auffüllversuchen nach der Aufzehrung der ursprüngliche Druck wieder eingefüllt, so ergab sich nicht etwa gleich der tiefe konstante Brennspannungswert, sondern die Brennspannung sank wie beim ersten Versuch von einem hohen Wert herab¹⁾. Dies wieder-

1) Daß es sich hierbei nicht um Spuren von Verunreinigungen handeln kann, ist daraus zu sehen, daß dieser Effekt auch beim Nachfüllen von gereinigtem Gas über magnetische Verschlüsse auftritt.

holt sich nun bei jedem Nachfüllen. Es genügt schließlich, wie bei den Wechselversuchen beobachtet werden konnte, eine Änderung des Druckes um wenige zehntel Torr, um den Kathodenfall erheblich (bis zu 20 Volt) zu erhöhen! Wir deuten diese Beobachtungen ungezwungen durch eine naheliegende Ergänzung zu unserer Arbeitshypothese: Bei der zu einem bestimmten Druck gehörenden idealen Stromdichteverteilung besitzt der Kathodenfall jeweils seinen tiefsten Wert, hat die Stromdichteverteilung sich noch nicht der idealen angeglichen, so liegt der Kathodenfall höher. Hinzufügen müssen wir allerdings noch, daß außerdem noch weitere zunächst noch unfaßbare Oberflächenänderungen der Kathodenoberfläche beim Einbrennen auftreten, wofür z. B. zeitliche Änderungen des Kathodenfalls von kugelförmigen Elektroden mit gleichmäßiger Stromdichteverteilung, wie sie Funk beobachtet hat, einen nicht übersehbaren Hinweis bilden.

V. Mechanismus der Aufzehrung

Ehe wir auf eine ausführliche Diskussion und Deutung unserer Versuchsergebnisse eingehen, muß zunächst noch eine wichtige Beobachtung mitgeteilt werden. Durch Lompe war einwandfrei festgestellt worden, daß das aufgezehrte Edelgas zu mindestens 90% in der Kathode nachgewiesen werden kann. Da die Hohlkathoden nach der Aufzehrung zwei deutlich verschiedene Partien zeigen, nämlich stark abgeätzte und bestäubte, mußte geprüft werden, ob sich beide bezüglich der Aufzehrung verschieden verhalten. Durch Zerschneiden und getrenntes Auswirbeln der abgeätzten und bestäubten Partien der Hohlkathode wurde nun nachgewiesen, daß das aufgezehrte Neon sich nur in den bestäubten Teilen der Hohlkathode befindet¹⁾. Aus den abgeätzten Teilen konnte Neon in spektroskopisch nachweisbarer Menge nicht befreit werden. Damit scheint die Sachlage im Prinzip relativ einfach zu sein: Aufzehrung findet an den Stellen der Kathode statt, die bestäubt werden.

An und für sich besteht die Möglichkeit, die Aufzehrung auf zwei grundsätzlich verschiedene Grundvorgänge zurückzuführen, die beide an keiner Stelle mit unseren Beobachtungen über die Aufzehrung in Widerspruch geraten, sie vielmehr unter Zuhilfenahme der Ergebnisse der Untersuchungen über Materialtransport und Stromdichteverteilung gleich gut zu erklären imstande sind. Einerseits kann die Aufzehrung gedeutet werden als Einmauerung und

1) Herrn cand. phys. Lumpe, der sich mit der Austreibung des Edelgases aus der Kathode und der Diffusion des Edelgases in der Kathode beschäftigt hat, verdanke ich diese Feststellung.

Einbau von Gasatomen in die bestäubten Kathodenteile. Vorauszusetzen wäre, was allerdings nach den bisherigen Erfahrungen über Adsorption von Edelgasen recht unwahrscheinlich ist, eine Adsorption des Edelgases am Kathodenmaterial. Wir können aus unseren Messungen die notwendige Oberflächendichte ν der adsorbierten Neonatome ungefähr abschätzen. Bei einer Aufzehrungsgeschwindigkeit von $5 \cdot 10^{17}$ At/h fanden wir durch Messung der Dicke des Bestäubungsbeschlages (ungefähr 30μ) nach 360 Stunden Brennzeit bei Drucken zwischen 1,5–0,5 Torr eine Vorwachs-geschwindigkeit v von rund $2,3 \cdot 10^{-9}$ cm/sec. Da

$$\nu \times \text{bestäubte Fläche} \times v$$

die Aufzehrungsgeschwindigkeit ergeben muß, würde für ν ein Wert von 10^{21} – 10^{22} At/cm² folgen, was unmöglich hoch erscheint. Wir müssen also die Hypothese der Einmauerung adsorbierter Edelgas-atome ablehnen.

Die zweite Möglichkeit bietet die Einschubhypothese dar. Hierbei wird angenommen, daß von den auftreffenden Neonionen bzw. den infolge Umladung noch mit hoher Geschwindigkeit auf die Kathode auftreffenden Gasatomen ein gewisser Bruchteil eingeschossen und in einer gewissen Tiefe steckenbleibt. Wie in dem vorläufigen Bericht bereits angedeutet und wie Funk a. a. O. darlegen wird, werden die eingeschossenen Teilchen infolge der Abtragung des Kathodenmaterials wieder befreit, allerdings bleibt jeweils eine sich ständig wieder durch Einschub erneuernde geringe Menge von Edelgas in der Kathode dauernd erhalten. Findet nun die Abtragung des Materials nicht statt, d. h. überwiegt die Zudiffusion der abgestäubten Teilchen die Zerstäubung, so wird einerseits das einmal eingeschossene Edelgas nicht wieder befreit, andererseits in dem allmählich wachsenden Bestäubungsniederschlag dauernd neues Gas eingeschossen, so daß an den bestäubenden Stellen die Kathode dauernd aufzehrt. Die Edelgaskonzentration, kann nun, was früher unverständliche Befunde über die Unmöglichkeit eine Kathode mit Edelgas zu sättigen aufklärt, beliebig hohe Werte annehmen¹⁾. Auch der Wert, der sich für die prozentuale Ausbeute des Einschusses abschätzen läßt, ist recht plausibel: Nur etwa das 10^3 . bis 10^4 . Teilchen dringt in die Kathode ein (ein genauer Wert läßt sich aus später ersichtlichen Gründen nicht angeben).

Es liegt nahe, anzunehmen, daß die Ausbeute des Einschusses nur von der Energie der auffallenden Teilchen, das würde heißen,

1) R. Seeliger, Naturw. 30. S. 461. 1942.

nur vom Kathodenfall abhängt. Da nun der Kathodenfall für Hohlkathoden über ein großes Druckgebiet konstant ist, würde aus dieser Annahme folgen, daß der Einschub druckunabhängig ist. Die Abhängigkeit der Gasaufzehrungsgeschwindigkeit vom Druck läßt sich trotzdem leicht verstehen, wenn wir auf die Abhängigkeit der Stromdichteverteilung und der Materialwanderung vom Druck zurückgreifen. Allerdings ist bis jetzt nur eine qualitative Beschreibung möglich und auch bei genaueren Kenntnissen über Zerstäubung und Rückdiffusion als wir sie zur Zeit besitzen, stehen einer quantitativen Theorie noch erhebliche Schwierigkeiten entgegen. Wie erwähnt, zehren nur die bestäubenden Stellen der Hohlkathode auf, und zwar in dem Maß, wie sie an der Stromleitung beteiligt sind. Die Aufzehrungsgeschwindigkeit ergibt sich also als Integral über die bestäubenden Kathodenelemente:

$$\frac{dn}{dt} = \int \Theta i_F dF,$$

wo Θ die Ausbeute, d. h., die pro Ampere und Sekunde eingeschossene Zahl Edelgasatome, i_F die Stromdichte im Amp/cm² des Kathodenelements dF ist. Zu berücksichtigen wäre, daß die Ausbeute Θ , die von der Auffallenergie und damit vom Kathodenfall abhängt, sich als druckabhängig und bei feinerer Betrachtung auch als ortsabhängig erweisen kann.

Leider läßt sich über den Zusammenhang von Stromdichte und Materialwanderung quantitativ nur wenig aussagen, da die geometrischen Verhältnisse der Diffusion der abstäubenden Teilchen recht unübersichtlich sind und sich zunächst auch im einfachsten Fall einer unendlich ausgedehnten ebenen Kathode einer mathematischen Behandlung entziehen¹⁾. Immerhin wird an den Stellen, wo die Stromdichte klein ist, vorzugsweise Bestäubung stattfinden, obwohl an manchen Stellen, z. B. am Rande, wegen erhöhter Abdiffusion trotz geringer Stromdichte Abätzen erfolgen kann. Wir verstehen jetzt die geringe Aufzehrung für höhere Drucke. Obwohl, wie die Oberflächenbilder aufweisen, der innere Teil der Hohlkathoden bestäubt wird, ist die Aufzehrungsgeschwindigkeit doch klein, da die Strombeteiligung der inneren Teile außerordentlich gering ist. Umgekehrt ist bei tieferem Druck, wo die Randgebiete bestäubt werden, die Strombeteiligung dieser Gebiete recht erheblich, so daß die Aufzehrungsgeschwindigkeit größer wird. Es gelingt, was zu bemerken an dieser Stelle von Interesse sein dürfte, die Aufzehrungsgeschwindigkeit

1) Über Zerstäubung und Rückdiffusion vgl. R. Seeliger, Ztsch. f. Phys. 119. S. 482. 1942 und die dort zitierte umfangreiche Literatur.

keit herabzusetzen, wenn man durch Anbringen von Schlitzten in der Hohlkathode den abgestäubten Teilchen die Möglichkeit gibt, die Hohlkathode durch Diffusion zu verlassen und so dafür sorgt, daß die Fläche der bestäubten Gebiete kleiner wird. Beobachtungen, die Lompe in der Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung über Hohlelektroden machte, die aus gewendelttem Draht bestanden, liegen im gleichen Sinn.

An und für sich wäre es nun angebracht, im einzelnen auf die in Teil I beschriebenen Beobachtungen über Gasaufzehrung einzugehen und sie zu deuten, wir wollen uns jedoch nur auf wenige Punkte beschränken, da der Zusammenhang zwischen den zeitlichen Effekten der Aufzehrung und der Stromdichteverteilung ohne weiteres ersichtlich ist. So ist z. B. der Stillstand der Aufzehrung bei Versuchen, die mit hohem Druck (8—10 Torr) beginnen, aus der zeitlichen Änderung der Stromdichteverteilung zu verstehen; die Stromdichteverteilung geht durch eine Verteilung hindurch, die so beschaffen ist, daß der Materialtransport verschwindet. Tatsächlich zeigten Oberflächenbilder von Hohlkathoden, die während der Stillstandsperiode aus dem Versuchsrohr genoramen wurden, daß die bestäubten Stellen sich auf ein Minimum an Fläche zusammengezogen hatten, nur der Winkel zwischen Boden und Zylinder war bestäubt. Als weiteres Beispiel sei auf die Schwankungen der Aufzehrungsgeschwindigkeit hingewiesen, die verursacht werden von den Schwankungen der Stromdichteverteilung infolge von Materialinhomogenitäten. Die früher¹⁾ gegebene Hypothese über Änderung der Zerstäubungsgeschwindigkeit mit der Gasbeladung können wir nicht aufrecht erhalten, da, wie Funk a. a. O. berichten wird, an kugelförmigen Elektroden keine Schwankungen mehr auftreten.

Die Unabhängigkeit der Aufzehrungsgeschwindigkeit vom Druck im tiefen Druckgebiet, die übrigens, wie bereits erwähnt wurde, nicht in allen Fällen auftritt, im einzelnen zu verstehen, ist allerdings schwierig. Es dürfte so sein, daß bei der zeitlichen Verschiebung der Stromdichteverteilung, die einerseits durch die Druckänderungen bedingt ist und andererseits durch den fortwährenden Umbau der Kathodenoberfläche infolge des Materialtransports bewirkt wird, „zufällig“ so vonstatten geht, daß das Integral über die bestäubenden Teile der Kathode eventuell ergänzt durch ein negatives Glied, das die Befreiung von Edelgas aus früher bestäubten Teilen darstellt, konstant bleibt. Auch die Änderung der Ausbeute θ mit steigendem Kathodenfall wird hierbei eine Rolle spielen können.

1) W. Bartholomeyczzyk, R. Seeliger u. W. Funk, Ztsch. f. Phys. 117. S. 651. 1941.

Die sprunghafte Änderung der Aufzehrungsgeschwindigkeit bei den Wechsel- bzw. Wiederauffüllversuchen zu verstehen, bereitet keine Schwierigkeit. Wegen des „Erinnerungseffekts“ der Stromdichteverteilung beginnt die neue Aufzehrungsphase mit einer Stromdichteverteilung, die erstens von der zu dem Druck gehörenden Idealen abweicht und zweitens, wie wir gesehen haben, recht hartnäckig bestehen bleiben kann. Da nun der Materialtransport als Diffusionsvorgang der abgestäubten Kathodenteilchen sich mit dem Druck automatisch ändert, muß sich eine wesentlich andere Aufzehrungsgeschwindigkeit einstellen.

VI. Schlußbemerkungen

Alles in allem dürfte aus unseren Beobachtungen sich ein einigermaßen geschlossenes Bild des Aufzehrungsvorgangs ergeben haben, das noch in feineren Einzelheiten ergänzt werden und sich in einigen Punkten als verbesserungsbedürftig erweisen kann. Insbesondere ist festzustellen, daß die wichtigste Komponente der Vorgänge in der Hohlkathode, die Stromdichteverteilung in unangenehmster Weise nicht nur von Brennzeit und Druck, sondern auch noch von der Vorgeschichte der Hohlkathode sich als abhängig erweist. Dazu kommt außerdem der sich über diese Effekte überlagernde Einfluß von Inhomogenitäten im Material, seien sie bedingt durch geringfügige Verunreinigungen oder durch geometrische Verhältnisse, oder durch verschiedene Korngrößen an den einzelnen Stellen der Hohlkathode.

Für die Untersuchung der Wechselwirkung von Stromdichteverteilung und Materialtransport, über die wir nur orientierende Beobachtungen anstellen konnten, und die ebenfalls einen wichtigen Schlüssel zum Verständnis für alle zeitlichen Änderungen von Entladungsparametern, wie etwa Kathodenfall, geben wird, sind große experimentelle Schwierigkeiten zu überwinden, da die diese Vorgänge bestimmenden Faktoren erst zum Teil erkannt und überhaupt kaum faßbar sind. Im übrigen muß jedoch betont werden, daß außer dem Umbau der Kathodenoberfläche durch die Materialwanderung, der, da die Oberflächenstruktur dabei sichtbar verändert wird, noch verhältnismäßig einfach studiert werden kann, noch andere Oberflächenprozesse sich abspielen werden, die nun keine leicht erkennbare äußere Strukturänderung hinterlassen und z. B. an der Kathodenfalländerung von kugelförmigen Elektroden erkannt werden. Untersuchungen in dieser Richtung, die allerdings zunächst nur auf das mehr äußerliche Studium des Kathodenfalls beschränkt bleiben müssen, sind in unserem Institut im Gange und haben uns bereits

für die Diskussion der Vorgänge in der Hohlkathode gute Dienste leisten können. Die Vorgänge, die wir dabei im Auge haben, lassen sich kurz mit dem Schlagworte „Umbau der Kathodenoberfläche durch Zerstäubung und Rückdiffusion“ sowie „Gasbeladung der Kathode“ umreißen.

Zusammenfassung

Die Aufzehrung von Hohlkathoden wurde zurückgeführt auf den Einschuß von Edelgasionen in die Kathode. Die Zerstäubung des Kathodenmaterials führt wegen der inhomogenen Stromdichteverteilung und der besonderen geometrischen Verhältnisse durch Rückdiffusion zu einer Materialwanderung, so daß an gewissen Stellen die Kathode zerstäubt und an anderen bestäubt wird. Das ständig eingeschossene Edelgas wird an den zerstäubten Stellen fortlaufend durch Zerstäubung wieder befreit, während es sich an den bestäubten Stellen in beliebig hoher Konzentration ansammelt. Die Abhängigkeit der Aufzehrungsgeschwindigkeit vom Druck wird zurückgeführt auf die Veränderung der Stromdichteverteilung und des damit gekoppelten Materialtransports mit dem Druck. Nachwirkungs- und Stillstandseffekt der Aufzehrung sowie spontane Änderungen des Kathodenfalls hängen mit spontanen zeitlichen Änderungen und dem Erinnerungseffekt der Stromdichteverteilung zusammen.

Herr Professor Seeliger, dem ich die Anregung zu dieser Arbeit verdanke, hat mich dabei in wertvollster Weise durch anregende Diskussionen, Versuchsvorschläge und Literaturhinweise unterstützt. Herr Dr. Funk¹⁾ stellte mir einen Teil seines Versuchsmaterials (Hochdruckgebiet) in dankenswerter Weise zur Verfügung. Der Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung bin ich für die Überlassung von Edelgas und sonstigem Material dankbar. Die Deutsche Forschungsgemeinschaft und die Helmholtzgesellschaft unterstützte mich bei der Beschaffung von Meßinstrumenten.

1) Anm. bei der Korrektur: Herr Dr. Funk fiel im Januar 1943 an der Ostfront.

Greifswald, Physikalisches Institut im Oktober 1942.

(Eingegangen 19. Februar 1943)

**Röntgenographische Strukturuntersuchung
an Zinksulfid-Kupfer-Phosphoren
nach der Pulvermethode**

Von Fritz Wecker

(Mit 7 Abbildungen)

A. Einleitung

Bei dem großen Einfluß, den Herstellungsbedingungen und spätere Einwirkungen, insbesondere verschiedene Arten der „Zerstörung“, auf das gesamte Verhalten der Kristallphosphore ausüben, ist eine nähere Untersuchung ihres kristallinen Aufbaus naheliegend. Die ganzen neueren Vorstellungen über den Leuchtmechanismus, über den Einbau der „Zentren“ bzw. der „Aktivatoratome“ machen ja sehr weitgehende Annahmen über den Aufbau dieser Stoffe. Es sind hier insbesondere die Arbeiten Schleedes^{1) 2)} zu nennen, welcher das Bild vom „mischkristallartigen Einbau“ des Phosphogens in das Grundgitter entwickelte, und bei dem speziellen Fall des blauleuchtenden ZnS-Reinstoff-Phosphors, bei welchem Aktivierung durch Zn angenommen werden muß, zeigte, daß hier das gleichzeitige Vorhandensein der beiden Modifikationen des ZnS (Wurtzit- und Blendestruktur) unerläßliche Bedingung für das Auftreten von Lumineszenz ist³⁾. Eine Zusammenfassung hierhergehöriger Arbeiten findet sich bei Riehl⁴⁾, welcher auch die Ergebnisse anderer Versuche an anderen Kristallphosphoren zur Stütze seiner Anschauungen heranzieht. Die Zwillingsbildung von Wurtzit-Blende wird in einer Arbeit von Aminoff und Broomé⁵⁾ näher behandelt.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf die Untersuchung technischer Phosphore, deren hervorragende Gleichmäßigkeit in allen Eigenschaften für die Durchführung verschiedener Versuche große Vorteile bietet und schließt insbesondere an eine neue Arbeit von

1) A. Schleede, *Ztschr. f. angew. Chem.* 53. S. 378. 1940.

2) A. Schleede, *Ztschr. f. angew. Chem.* 50. S. 908. 1937.

3) A. Schleede, *Ztschr. f. angew. Chem.* 48. S. 276. 1935.

4) N. Riehl, *Physik und technische Anwendung der Lumineszenz*, Berlin 1941, Springer-Verlag.

5) G. Aminoff u. B. Broomé, *Ztschr. f. Kristallogr.* 80. S. 355. 1931.

Becker und Schaper¹⁾ an, in welcher Fragen der Phosphoreszenzzerstörung an ZnS-Cu-Phosphoren, z. T. unter gänzlich neuen Gesichtspunkten, behandelt werden.

B. Allgemeines über ZnS; Versuchsmethodik

ZnS kristallisiert in zwei verschiedenen Modifikationen, in der regulären Form, in welcher es in der Natur als Zinkblende vorkommt (β -ZnS), und in der hexagonalen Form des Wurtzits (α -ZnS). Bei Zimmertemperatur ist β -ZnS stabil, während sich α -ZnS oberhalb etwa 1100°C bildet und bei üblicher Abkühlungsgeschwindigkeit in dieser Modifikation „einfriert“. Herstellungsbedingungen und Strukturbeschreibungen finden sich u. a. bei Tiede und Schleede²⁾, welche wohl als erste ZnS im Druckofen herstellten und schmolzen, bei Ulrich und Zachariasen³⁾, deren α -ZnS allerdings, aus ihren Intensitätsangaben zu schließen, noch etwa 50% β -ZnS enthielt, sowie in den allgemeinen Strukturbeschreibungen, z. B. bei Glocker⁴⁾. Das aus Lösungen gefällte ZnS [mittels H_2S , $(NH_4)HS$ usw.] ist äußerst fein und wird häufig als „amorph“ bezeichnet. Es besteht aus feinen Flocken, welche stark verbreiterte Debye-Scherrer-Linien liefern, wobei die höher indizierten Interferenzen meist überhaupt nicht mehr wahrnehmbar sind⁵⁾. Die Größe der „kohärent streuenden“ Bereiche ist also auf einige Elementarzellen beschränkt. Jedoch handelt es sich stets um die reguläre (β -)Modifikation. Nach eigenen Versuchen können durch sehr langsames Ausfällen bei etwa 80°C Niederschläge erhalten werden, die recht scharfe Linien des β -ZnS liefern und schätzungsweise in der Korngröße durchschnittlich eine Größenordnung höher liegen; auch konnte an solchen Niederschlägen in einigen Fällen das Glitzern kleiner Kristallite bei geeigneter Beleuchtung wahrgenommen werden. Nach ausreichendem Glühen der Niederschläge werden immer Pulver erhalten, die ein reines Diagramm des α -ZnS mit vollkommen scharfen Interferenzen liefern, die Pulver fühlen sich jedoch auch nach dem Glühen noch durchaus mehlig und feinstpulverig an. Zusatz von Schmelzmitteln wie NaCl, KCl und ähnliche begünstigen offenbar die Ausbildung des Wurtzitgitters schon bei erheblich tiefer liegenden Temperaturen. Diese Schmelzzusätze können meist nach dem Glühen so vollständig ausgewaschen werden, daß ihr röntgenographischer Nachweis nicht

1) A. Becker u. I. Schaper, *Ann. d. Phys.* [5] 42. S. 297. 1942.

2) E. Tiede u. A. Schleede, *Chem. Ber.* 53. S. 1721. 1920.

3) F. Ulrich u. W. Zachariasen, *Ztschr. f. Kristallogr.* 62. S. 260. 1925.

4) R. Glocker, *Materialprüfung mit Röntgenstrahlen*, Berlin 1936, Springer-Verlag.

5) E. Haber, *Chem. Ber.* 55. S. 1717. 1922.

mehr gelingt. Ein geringer, ebenfalls häufig gegebener Zusatz von CdS wirkt anscheinend auch förderlich für die Ausbildung des α -ZnS; da CdS isomorph mit ZnS ist und gewöhnlich in der α -Form kristallisiert, ist diese Wirkung leicht zu verstehen. Bei den hier untersuchten Phosphoren konnte jedoch röntgenographisch kein Einfluß des CdS auf das ZnS-Gitter festgestellt werden¹⁾.

Da unter diesen Umständen die Kenntnis der Mengenverhältnisse von α - und β -ZnS in einem Phosphor wünschenswert war, und eine Unterscheidung auf Grund anderer Eigenschaften nicht möglich schien (Dichte des α -ZnS = 3,98; Dichte des β -ZnS = 4,06), wurde eine verhältnismäßig einfache quantitative röntgenographische Methode entwickelt, welche in dem vorliegenden speziellen Fall überraschend gute Ergebnisse lieferte und hier etwas näher beschrieben werden soll.

Eine Reihe der unsicheren, die Intensität der Interferenzen bestimmenden Faktoren fällt von selbst fort, da es sich ja um chemisch identische Stoffe handelt (Atomformfaktor, Temperaturfaktor). Bei dem ähnlichen Aufbau der beiden Gitter (kubische bzw. hexagonale dichteste Kugelpackung), der nahezu gleichen Dichte und der durchweg sehr geringen Korngröße konnte angenommen werden, daß auch die durch Struktur und Kristallbau gegebenen Intensitätsfaktoren (Strukturfaktor, Absorption, Extinktion) von Fall zu Fall wenigstens annähernd gleich sein würden. Daher wurden die Debye-Scherrer-Diagramme von Pulvern bekannter Zusammensetzung photometriert und zur Herstellung von „Eichkurven“ benutzt, mit deren Hilfe dann die Aufnahmen der unbekannten Proben ausgewertet wurden. Die „Eichsubstanzen“ wurden durch Mischen abgewogener Mengen feinstpulverigen reinen α -ZnS bzw. β -ZnS hergestellt. (Das α -ZnS war durch Glühen im Hochdruckofen gewonnen, das β -ZnS durch feinstes Zerreiben natürlicher afrikanischer Zinkblende.) Die Proben wurden in ausgesucht gleichmäßigen Kapillaren aus Lindemannglas in der Aufnahmekammer (von 57,3 mm Durchmesser) befestigt; es wurde sorgfältig darauf geachtet, daß keine Entmischung eintrat. Die Aufnahmen wurden mit Ni-gefilterter Cu-K-Strahlung aufgenommen, wobei der Film vor dem von den lumineszierenden Proben ausgesandten Licht geschützt werden mußte. Die nach den beiden Enden des Films hin ansteigende Schwärzung des Untergrundes konnte weitgehend dadurch beseitigt werden, daß das Ni-Filter in Verbindung mit einem Al-Filter als Zylinder das Präparat umgab; für den Ein- und Austritt des Primärstrahles waren Öffnungen angebracht.

1) Vgl. die Anmerkung am Schluß!

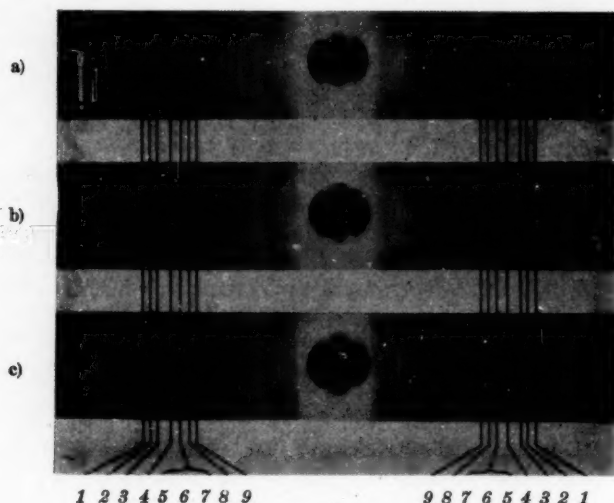
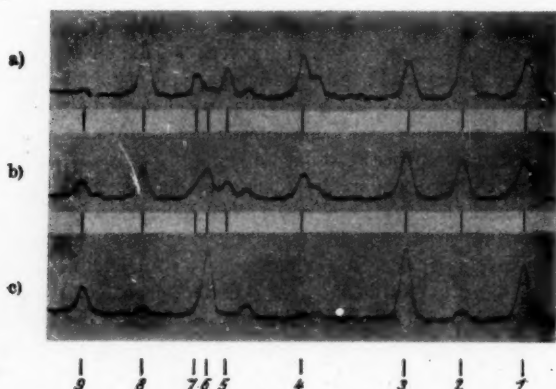
Abb. 1. Eichaufnahmen. a) 90, b) 50, c) 10% α -ZnS

Abb. 2. Registrierungen aus den Diagrammen der Abb. 1.

a) 90, b) 50, c) 10% α -ZnS

Das einfache, selbst zusammengestellte Registrierphotometer besteht im wesentlichen aus einem „Multiflexgalvanometer“ mit Registriervorrichtung nach B. Lange in Verbindung mit einem Selenphotoelement. Der Film wird durch umgesetzten Antrieb

eines Wechselstromsynchronkleinmotors bewegt und mittels Nieder-voltglühlampe beleuchtet; diese wird gespeist von einem Ladegerät mit Batterie in Pufferschaltung. Das vergrößerte Bild des Films fällt auf einen Spalt, der das Photoelement abdeckt. Durch den Antrieb sowohl der Filmbewegung als auch der Registrierwalze mittels Synchronmotoren ist ein guter Gleichlauf beider gewährleistet; die ganze Einrichtung arbeitet etwas langsam, aber durchaus befriedigend. Abb. 1 zeigt die Diagramme dreier verschiedener Eichsubstanzen, Abb. 2 die entsprechenden Registrierungen der verwendeten Ausschnitte.

Die Linien sind hier fortlaufend von außen nach innen nummeriert, in Tab. 1 sind die Indizes dieser Linien, sowie ihre Zugehörigkeit zum Gitter des α -ZnS bzw. des β -ZnS verzeichnet. Wie man sieht, tritt nur eine einzige Linie des β -ZnS mit ausreichendem Abstand von anderen Linien auf, nämlich Nr. 9 mit der Indizierung (400), deren Intensität aber für quantitative Messungen recht gering ist.

Tabelle 1

Verzeichnis der registrierten Linien des α -ZnS und des β -ZnS mit Indizierung

Nr. der Linie	α -ZnS	β -ZnS	Nr. der Linie	α -ZnS	β -ZnS
1	0 0 0 6	3 3 3	5	2 1 $\bar{1}$ 1	—
2	3 0 3 2	—	6	—	3 1 1
3	2 1 $\bar{3}$ 3	—	7	2 1 3 0	—
4	3 0 3 0	4 2 2	8	2 0 $\bar{2}$ 3	—
	1 0 $\bar{1}$ 5	—	9	—	4 0 0

Über den Zusammenhang zwischen Strahlungsintensität und Filmschwärzung finden sich in der Literatur so widersprechende Angaben, daß eine Bestimmung der Schwärzungskurve des verwendeten Films unumgänglich schien. Sie wurde mit Hilfe eines rotierenden Bleisektors ausgeführt und ist in Abb. 3 dargestellt. Verwendet wurde „Agfa-Metalix-Laue-Film“, immer der gleichen Emulsionsnummer, der als doppelseitig begoessener Film in größeren Längen mit zu der Kammer passenden Längenmarkierungen bezogen wurde. Entwickelt wurde mit „Agfa-Röntgen-Rapid-Entwickler“ 6 Min. bei 18° C. Genügende Proportionalität zwischen Intensität und Schwärzung ist nach Abb. 3 sichergestellt, solange Schwärzungen $S > 1$ vermieden sind¹⁾; danach wurde im allgemeinen

1) M. E. Nahmias, Analyse des matières cristallisées au moyen des rayons X, Paris, Herrmann & Cie. 1936, findet vollkommene Proportionalität bis zu größeren Werten von S .

exponiert, in einigen Fällen, wo größere Schwärzungen nicht vermieden werden konnten, wurden entsprechende Korrekturen angebracht.

Abb. 4 zeigt den Gehalt der Eichsubstanzen an α -ZnS, dargestellt in Abhängigkeit vom Intensitätsverhältnis zweier Debye-Scherrer-Linien, welche in Abb. 2 mit 1 und 2 bezeichnet sind.

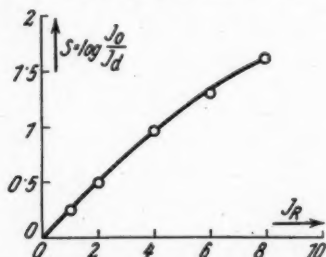


Abb. 3. Schwärzungskurve des verwendeten Films.

I_R = Intensität der Röntgenstrahlung

I_0 = auftreffende

I_d = durchgelassene

} Intensität im Photometer

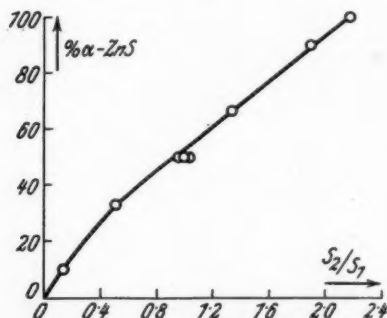


Abb. 4. Gehalt an α -ZnS und Verhältnis der Schwärzungen zweier Debye-Scherrer-Linien

Dabei gehört Linie 1 sowohl dem α -ZnS an (0006 und 3032), als auch dem β -ZnS (333), während Linie 2 nur vom α -ZnS herrührt (2133). Eine nur dem β -ZnS zugehörige Linie ausreichender Intensität und genügenden Abstandes von anderen Linien konnte leider nicht gefunden werden. Die verwendeten Linien entsprechen Glanzwinkeln von ungefähr 45° ; dies hat den Vorteil, daß die Linien kaum gekrümmt sind, und daher mit langem Spalt photo-

metriert werden können, was zur Erzielung eines glatten Untergrundes bei dem ziemlich grobkörnigen Aufnahmestoff sehr erwünscht ist.

Bei der prinzipiellen Unempfindlichkeit der röntgenographischen Methode, wenn der zu bestimmende Stoff nur wenige Prozent der Gesamtmenge ausmacht¹⁾, und bei der besonders ungünstigen Lage der Linien des β -ZnS (fast alle intensiven Linien des β -ZnS fallen mit Linien des α -ZnS zusammen) wurde nach einigen Versuchen

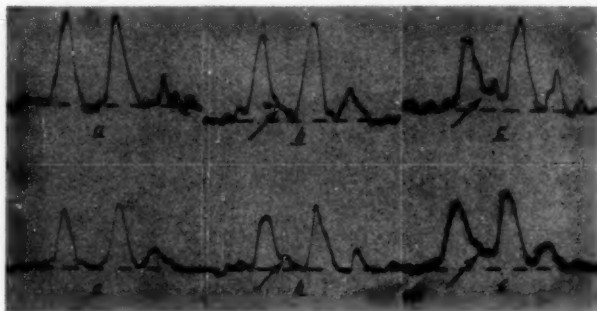


Abb. 5. Zum Nachweis geringer Mengen β -ZnS in α -ZnS.
a) 100% α -ZnS, b) 95,5% α -ZnS, 4,5% β -ZnS, c) 90% α -ZnS, 10% β -ZnS.

Man beachte die gute Übereinstimmung der beiden unabhängig an verschiedenen Tagen aufgenommenen und registrierten Reihen!

ein Weg gefunden, um wenigstens qualitativ β -ZnS bis herab zu etwa 4% mit Sicherheit nachzuweisen: wie Abb. 5 zeigt, verändert die sehr intensive Linie (3 1 1) des β -ZnS schon bei geringer Konzentration desselben die Form und Intensitätsverteilung der sie umgebenden Linien (2 1 $\bar{3}$ 1) und (2 1 $\bar{3}$ 0) des α -ZnS. Planimetrieren würde hier wohl auch zu brauchbaren quantitativen Ergebnissen führen, im folgenden wird jedoch nur der qualitative Nachweis geringer Mengen von β -ZnS sich als notwendig erweisen.

C. Untersuchungen

1. Struktur unbehandelter Phosphore

• Alle untersuchten Phosphore²⁾ zeigten reine α -ZnS-Struktur, andere Linien waren nicht zu finden; auch nicht solche von CdS oder von Schmelzmitteln. Da, wie aus Abb. 5 hervorgeht, ein

1) R. Glocker, a. a. O. S. 223.

2) Es wurden untersucht: ZnS-Phosphor „Höchst Grün“ der I. G. Farbenindustrie, A 31 der Firma Maier und „Grün N“ von Riedel-de Haën.

Anteil von 4—5% β -ZnS noch nachweisbar wäre, so kann jedenfalls gesagt werden, daß der Gehalt aller dieser Phosphore an β -ZnS unterhalb dieser Grenze liegen muß. An älteren und an einigen selbsthergestellten Phosphoren konnten dagegen Linien von β -ZnS und insbesondere Linien des ZnO gefunden werden, welches sich bei unvollkommenem Luftabschluß während der Präparation leicht bilden kann.

2. Zerstörte ZnS-Cu-Phosphore

Daß durch Zerreiben und starken, ungleichseitigen Druck eine Umwandlung von α -ZnS in β -ZnS bewirkt werden kann, zeigten schon vor längerer Zeit Schleede und Gantzckow¹⁾ und wiesen auch auf die maßgebende Rolle dieser Umwandlung bei der Druckzerstörung der ZnS-Phosphore hin²⁾. Jedoch blieb die Frage ungeklärt, ob die Druckzerstörung lediglich eine solche Modifikationsumwandlung darstelle, ebenso, wie offenbar über die Lumineszenzfähigkeit des β -ZnS keine einheitliche Ansicht bestand. Schleede sprach die Vermutung aus, daß auch das β -ZnS lumineszenzfähig sei³⁾, zieht dies jedoch in einer anderen Arbeit in Zweifel⁴⁾. Tomaschek spricht auch beiden Modifikationen Lumineszenzfähigkeit zu⁵⁾, in der neueren Literatur sind aber Angaben darüber oder eine Bestätigung nicht zu finden. Zur Klärung dieser Fragen wurde daher an einigen in verschiedenem Maße druckzerstörten Proben (mittels hydraulischer Presse) desselben Phosphors Messungen der Lumineszenzfähigkeit und des Gehaltes an α -ZnS gemacht. Die optische Untersuchung der Proben führte Herr Prof. Dr. Becker aus, sie bestand in der Messung des Momentanleuchtens und der Tilgung bei Erregung mittels einer Hg-Hochdrucklampe durch ein Schottisches UG1-Filter; die Lumineszenz wurde mit Hilfe eines Selenphotoelementes objektiv gemessen. Da bei der Druckzerstörung die Abnahme des Momentanleuchtens und des Nachleuchtens streng parallel gehen⁶⁾, kann der Grad der Druckzerstörung als hierdurch gut definiert gelten. Die Ergebnisse sind in Tab. 2 zusammengestellt. Die überraschende Übereinstimmung von Lumineszenzfähigkeit und Gehalt an α -ZnS weist zwingend darauf hin, daß das entstandene β -ZnS im ganzen Wellenlängengebiet, über das sich

1) A. Schleede u. H. Gantzckow, *Ztschr. f. Phys.* 15. S. 184. 1928.

2) A. Schleede u. H. Gantzckow, *Ztschr. phys. Chem.* 106. S. 37. 1923.

3) A. Schleede, *Naturw.* 14. S. 586. 1926.

4) A. Schleede, *Ztschr. phys. Chem.* 106. S. 386. 1923.

5) R. Tomaschek, *Ann. d. Phys.* [4] 65. S. 189. 1921.

6) Vgl. Handb. d. Exp.-Phys. Bd. 23—1, Lenard-Schmidt-Tomaschek, *Phosphoreszenz-Fluoreszenz*, Leipzig 1928, S. 630 ff.

Tabelle 2

Lumineszenzfähigkeit, Tilgung und Gehalt an α -ZnS
verschieden stark druckzerstörter Proben eines Phosphors

Nr.	Lumineszenz- fähigkeit	Gehalt an α -ZnS in %	Tilgung in %
1	1	100	15,1
2	0,5	55	25,1
3	0,45	44	31,2
4	0,109	10	55,9

die Empfindlichkeit der Selenphotoelemente erstreckt, bei der beschriebenen Erregungsweise jedenfalls nicht lumineszenzfähig ist. Gleichzeitig erfährt auch die besonders von Riehl und Ortmann¹⁾ behandelte Frage nach der Zuverlässigkeit der Angaben, über Druckzerstörung auf Grund optischer Messungen (Täuschung durch Verringerung der Korngröße und damit der Transparenz) eine Beantwortung; es scheint, daß hier der Einfluß der Korngrößenverminderung auf die Durchsichtigkeit und damit auf die Lumineszenzfähigkeit stark überschätzt wurde und daß er vielleicht durch die entsprechende Oberflächenvergrößerung wieder aufgehoben wird; denn unsere Messungen sind an *dünnen* Schichten (etwa 0,5 g auf 2 cm²) gemacht. Durch Mörsern allein konnten wir so starke Zerstörungen, wie die hier gemessenen, niemals erreichen. Es dürfte also erwiesen sein, daß beim ZnS-Phosphor die Druckzerstörung im wesentlichen auf der Umwandlung in die nicht lumineszenzfähige β -Modifikation beruht.

In Anbetracht der Tatsache, daß auch andere phosphoreszierende Stoffe, welche nur in einer Modifikation auftreten, Druckzerstörung zeigen, wenn auch nicht in so starkem Maße wie ZnP₂S, erscheint es wahrscheinlich, daß es auch eine Druckzerstörung der Lumineszenzfähigkeit an sich gibt, also ohne Modifikationsumwandlung. Das meistuntersuchte ZnS ist natürlich für solche Untersuchungen gänzlich ungeeignet²⁾.

Ein unerwartetes Ergebnis brachte die Untersuchung von α -strahlzerstörten (α -zerstörten), sowie von lichtzerstörten Phosphoren. Besonders bei ersteren liegt die Vermutung nahe und wurde auch schon ausgesprochen³⁾, daß es sich hierbei ebenfalls um eine Modifikationsumwandlung des ZnS handie; auch energetische Betrachtungen

1) N. Riehl u. H. Ortmann, Ann. d. Phys. [5] 29. S. 556. 1937; vgl. auch in der Monographie Riehls, a. a. O.

2) Eine weitere Mitteilung über diesen Gegenstand erscheint demnächst, Untersuchungen sind im Gange.

3) A. Schleede u. H. Gantsckow, Ztschr. phys. Chem. 106. S. 37. 1923.

tungen schienen dafür zu sprechen. Die vorliegende röntgenographische Untersuchung licht- und α -zerstörter Phosphore zeigte jedoch nie die geringste Änderung von Struktur oder Gitterkonstanten der Phosphore. Beispielsweise ergab der zweimal mit großen Emanationsmengen behandelte Phosphor 5a¹⁾, dessen Lumineszenz-

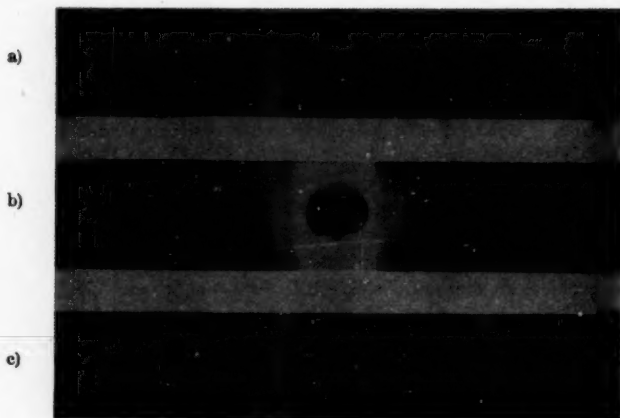


Abb. 6. ZnS Phosphor. a) unbehandelt, b) α -zerstört, c) druckzerstört

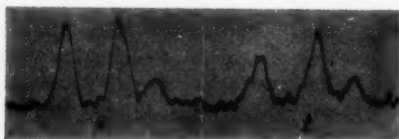


Abb. 7. Registrierungen aus den Diagrammen a) und b) der Abb. 6.
a) unbehandelt, b) α -zerstört.

Ein Gehalt an β -ZnS ist bei dem α -zerstörten Phosphor nicht nachzuweisen

fähigkeit nur noch etwa 20% des anfänglichen Wertes betrug, ein reines Wurtzitdiagramm, das von dem des unbehandelten Phosphors nicht zu unterscheiden war; der Gehalt an β -ZnS war also sicher geringer als 5%. Lediglich über eine Vermehrung amorphen Materials, d. h. über eine Zunahme der gleichmäßigen Untergrundschwärzung auf den Diagrammen, kann nichts ausgesagt werden.

1) Vgl. A. Becker u. I. Schaper, a. a. O.

Abb. 6 zeigt die Diagramme des unzerstörten, des stark α -zerstörten (5a) und des stark druckzerstörten (Nr. 4, Tab. 2) Phosphors, während Abb. 7 die zum Nachweis geringen Gehaltes an β -ZnS geeigneten Registrierungen aus dem Diagramm 6 zeigt. Es muß also, wie auch aus anderen Gründen, angenommen werden, daß es sich hier um einen ganz anderen Mechanismus der Zerstörung handelt, welcher sich offenbar mit röntgenographischen Mitteln, wie den hier angewandten, nicht fassen läßt.

3. Über Dichteänderungen bei der Druckzerstörung

Über das Auftreten von Dichteänderungen bei der Druckzerstörung bestehen seit langer Zeit Meinungsverschiedenheiten, was bei der Schwierigkeit von Dichtebestimmungen an derart feinpulverigen Substanzen nicht verwunderlich ist. Diesbezügliche frühere Untersuchungen¹⁾ machten eine Dichtevergrößerung wahrscheinlich, während Riehl und Ortmann²⁾ nichts derartiges fanden, offenbar auch nicht an ZnS. Nun stimmen aber die Gitterkonstanten des α -ZnS und der Phosphore einerseits, diejenigen des durch Druckzerstörung entstandenen β -ZnS und der natürlichen Zinkblende andererseits mit aller Genauigkeit überein. Da nun β -ZnS eine größere Dichte (4,06) hat als α -ZnS (3,98), ist daraus zu schließen, daß *zumindest im Falle des ZnS die Druckzerstörung eine Dichtevergrößerung mit sich bringt*. Über andere Phosphore kann in dieser Hinsicht natürlich nichts ausgesagt werden, doch zeigt diese Betrachtung, mit welcher Vorsicht pyknometrische Dichtemessungen an derart feinpulverigen Substanzen aufzunehmen sind³⁾.

4. Zur Frage der Gitteraufweitung oder -störung durch Einbau des Aktivators

Im Zusammenhang wurde auch die Frage der Gitteraufweitung oder -störung durch den Einbau des Aktivators erneut überprüft: Es konnte in keinem Fall eine Gitteraufweitung am Phosphor gegenüber dem reinen Grundmaterial gefunden werden; die Meßgenauigkeit der Aufnahmen (mit Eichsubstanz) und der Auswertung hätte eine Gitteraufweitung noch erkennen lassen, welche einer Temperaturerhöhung um etwa 50° C entspricht. Wenn neuer-

1) P. Waentig, Ztschr. phys. Chem. 51. S. 435. 1905; B. Winawer, Diss. Heidelberg 1909.

2) N. Riehl u. H. Ortmann, Ann. d. Phys. [5] 29. S. 556. 1937.

3) Vgl. hierzu auch: A. Ott, Über Dichteuntersuchungen an grobkörnigen und feinstpulvrigen Substanzen, Diss. Heidelberg 1942.

dings¹⁾ eine solche gefunden wurde, so ist zu bemerken, daß diese Autoren bei „Einbau“ von etwa 2,5% Mn in ZnSiO_4 bzw. ähnlichen Mengen Pb in CaWO_4 eine Gitteraufweitung von etwa 3% feststellten; es handelte sich hier offenbar nicht mehr um „Aktivatoren“ in „Phosphoren“, da die zur optimalen Aktivierung notwendigen Mengen um Größenordnungen übertroffen werden, wobei Gitterstörungen nicht verwunderlich sind. Eine frühere Bemerkung Schleedes²⁾, wonach dieser bei ZnS eine Linienverbreiterung um etwa 15% durch den Einbau des Aktivators als wahrscheinlich angab, konnte bei der Schwierigkeit derartiger Messungen nicht mit der wünschenswerten Sicherheit nachgeprüft werden; es wurde nichts gefunden, was darauf hindeuten würde.

D. Zusammenfassung

Es wurden Untersuchungen an ZnS-Cu-Phosphoren mittels Debye-Scherrer-Diagrammen qualitativ und quantitativ ausgeführt.

Alle untersuchten gutleuchtenden ZnS-Phosphore zeigten reines Wurtzitgitter.

Bei der Druckzerstörung gehen Lumineszenzfähigkeit und Gehalt an α -ZnS einander parallel. Licht- und α -zerstörte Phosphore zeigen keine Modifikationsumwandlung, wobei allerdings nichts über das Auftreten von amorphem ZnS gesagt werden kann.

Druckzerstörung bewirkt bei ZnS Dichtevergrößerung.

Ein Einfluß des eingebauten Aktivatoratoms (Cu) auf das Grundgitter war nicht nachweisbar, ebensowenig eine Änderung im Gitter durch Licht- oder α -Zerstörung.

Herrn Prof. Dr. A. Becker, dem Direktor des Philipp-Lenard-Institutes, danke ich herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit und sein stetes Interesse an derselben, sowie für die zur Verfügung gestellten Hilfsmittel. Ebenso danke ich Herrn Doz. Dr. W. Borchert für seine freundliche Anleitung zu röntgenographischen Arbeiten.

„Anmerkung bei der Korrektur: Wie weitere Versuche zeigten, bilden α -ZnS und das isomorphe α -CdS eine anscheinend lückenlose Mischkristallreihe, wobei mit steigendem Gehalt an CdS eine zunehmende Aufweitung des ZnS-Gitters eintritt. Eine solche Gitteraufweitung infolge CdS-Zusatzes liegt bei den hier untersuchten Phosphoren zum Teil an der Grenze der Nachweisbarkeit, war jedoch z. B. bei dem Phosphor „Höchst Grün“ einwandfrei feststellbar.

1) H. G. Jenkins, A. H. McKeag u. H. P. Rooksby, Nature 143. S. 978. 1939, zitiert nach: Phys. Ber. 20. S. 2163. 1939.

2) A. Schleede, Ztschr. phys. Chem. 106. S. 386. 1923.

Heidelberg, Philipp-Lenard-Institut.

(Eingegangen 28. Januar 1943)

Lineare Theorie des Elektrons. II

Von Fritz Bopp

(Mit 2 Abbildungen)

Inhalt: § 1. Das verallgemeinerte Potential. — § 2. Beispiele für das statische Potential. — § 3. Feld- und Wellengleichungen. — § 4. Bewegungsgleichungen. — § 5. Die Nebenbewegung des kräftefreien Teilchens. — § 6. Der Einfluß äußerer Kräfte. — § 7. Ansatz zur Quantelung. — Zusammenfassung.

In den klassischen Bewegungsgleichungen erscheint bekanntlich die Beschleunigung eines Teilchens als Funktion seines Orts und seiner Geschwindigkeit. Diese Formulierung ist nur so lange richtig, als man davon absehen darf, daß sich Wirkungen nicht unendlich schnell, sondern nur mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten. Die Berücksichtigung von Laufzeiteffekten bringt höhere Zeitableitungen in die Bewegungsgleichungen und führt damit im allgemeinen zu neuen kinetischen Freiheitsgraden. Z. B. erhält man, wenn man in der Näherung nur einen Schritt weitergeht, die gewöhnliche Strahlungskraft, in der dritte Zeitableitungen vorkommen.

Welche Bedeutung haben die neuen Freiheitsgrade? Diese Frage ist bisher nur wenig diskutiert worden. Gewöhnlich behandelt man die Strahlungskraft als kleine Störung und berücksichtigt damit nur solche Lösungen, die bei verschwindender Strahlungskraft stetig in die normalen Lösungen übergehen. Das Rechenverfahren führt also zu einer Auswahl von Lösungen, die die neuen Freiheitsgrade nicht wirksam werden läßt. Damit werden, ohne daß dies ausdrücklich gesagt wird, Lösungen aus der Betrachtung ausgeschieden, die, wie wir noch sehen werden, ein sehr unwahrscheinliches Aussehen haben, was wohl Ausdruck des Näherungscharakters der Strahlungskraft ist. Die Beschränkung der Lösungsmannigfaltigkeit durch die Rechenweise erscheint darum der Qualität der Näherung angemessen.

Dadurch wird aber die Frage nach der Bedeutung der neuen Freiheitsgrade nicht beseitigt. Denn die Verbesserung der Näherung führt zu noch höheren Zeitableitungen und damit zunächst wenigstens zu weiteren Freiheitsgraden. Meines Wissens hat Wessel¹⁾ zum erstenmal die Notwendigkeit zur Beantwortung der Frage nach den

1) W. Wessel, *Ztschr. f. Phys.* 92. S. 407. 1934; 110. S. 625. 1938.

neuen Freiheitsgraden betont und versucht, diese mit dem Spin des Elektrons zu identifizieren. Dabei muß er auch die bisher ausgeschiedenen Lösungen in Betracht ziehen und begegnet ihrem physikalisch unplausiblen Verhalten mit dem allerdings nur qualitativen Hinweis auf den Näherungscharakter des gewöhnlichen Ausdrucks für die Strahlungskraft. Dirac¹⁾ hat später unter der Annahme der strengen Gültigkeit dieses Ausdrucks gezeigt, daß die Ausschaltung der paradoxen Lösungen äquivalent ist mit der Forderung einer *universellen* Endbedingung für die Beschleunigung, die neben die üblichen *akzidentellen* Anfangsbedingungen für Ort und Geschwindigkeit treten soll. Die finale Bedingung für die Beschleunigung widerspricht dem *Kausalitätsprinzip*, wie ein Beispiel Diracs zeigt (vgl. dazu S. 596/597).

Die folgenden Betrachtungen stehen zwischen den beiden hier geschilderten Thesen. Es bleibe zunächst dahingestellt, ob die neuen Freiheitsgrade Ausdruck spezieller physikalischer Eigenschaften sind oder ob sie nur formale Bedeutung haben und durch geeignete Zwangsbedingungen, die zu den Bewegungsgleichungen hinzutreten, wieder festgelegt werden müssen. Unser Ziel ist es, die Frage nach den neuen Freiheitsgraden in ihrer Abhängigkeit von möglichen Variationen der Feldgleichungen zu untersuchen. Dabei werden wir nur solche Veränderungen ins Auge fassen, die erstens wenigstens im klassischen Bereich das Singularitätenproblem lösen und zweitens widersinnige Nebenlösungen der neuen Freiheitsgrade vermeiden. Die erste Forderung allein läßt bekanntlich bezüglich der Variationen der Feldgleichungen noch einen weiten Bereich von Möglichkeiten zu. Die zweite liefert demgegenüber weitgehende Einschränkungen, so daß sich charakteristische Feldtypen herausheben. Die Frage nach der Nebenbewegung liefert darum einen wesentlichen Gesichtspunkt zur endgültigen Festlegung der Feldgleichungen.

Diese Bedeutung wird noch durch einen andern Umstand unterstrichen. Die Notwendigkeit der Abänderung der Maxwellschen Feldgleichungen ergibt sich zunächst aus der endlichen Ruhmasse des Elektrons. Wesentliche Feldänderungen machen sich darum erst in Abständen von der Größenordnung des klassischen Elektronenradius r_0 , oder bei Frequenzen oberhalb c/r_0 bemerkbar. In diesem Bereich liegen besonders für eine klassische Theorie nur spärliche Erfahrungen vor. Die Frage nach der Zahl der Freiheitsgrade ist demgegenüber in allen Energiebereichen akut. Man muß also, wenn man nur die nach verschiedenen Ansätzen mögliche Nebenbewegung untersucht, zu weitgehenden Aussagen über die Feldgleichungen

1) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London 167. S. 148. 1938.

kommen auf Grund des reichhaltigen Erfahrungsmaterials in zugänglichen Energiebereichen, insbesondere der negativen Erfahrung, daß in diesen Bereichen (vielleicht außer dem Spin) keine neuen Freiheitsgrade merklich sind.

Bei der bekannten Schwerfälligkeit des mathematischen Apparates der Feldmechanik ist die Durchführung eines so weitgehenden Programms nur möglich durch die Beschränkung auf die linearen Formen der Mie-Bornschen Rahmenelektrodynamik¹⁾. Ein Beispiel für eine solche lineare Theorie des Elektrons haben wir bereits früher angegeben²⁾. Die Verallgemeinerung auf beliebige lineare Theorien wurde erleichtert und ihre Diskussion ermöglicht durch die Anwendung einer auf Dirac (a. a. O.) zurückgehenden außerordentlich zweckmäßigen Darstellung des Viererpotentials, von der wir im folgenden ausgehen wollen.

§ 1. Verallgemeinerte Potentiale und Feldstärken

Dirac (a. a. O.) hat die Maxwell'schen Potentiale in einer Form dargestellt, die sich leicht in bemerkenswerter Weise verallgemeinern läßt und so alle linearen Formen der Mie-Bornschen Theorie mit einem Schlag zu betrachten erlaubt.

Seien $(x_1 \dots x_4) = (r, i c t)$ die Koordinaten des Aufpunkts und $(q_1(s) \dots q_4(s)) = (r_0(s), i c t_0(s))$ mit $q_\mu^2 = -c^2$ die der Bahnkurve eines Elektrons der Ladung e_0 , so kann man die Maxwell'schen Potentiale nach Dirac mittels dessen δ -Funktion folgendermaßen schreiben:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_\mu(x) = \frac{2e_0}{c^3} \int_{\text{ret.}} \dot{q}_\mu(s) \delta(\sigma) ds, \\ \sigma = \frac{1}{c^2} (x_\mu - q_\mu(s), x_\mu - q_\mu(s)). \end{array} \right.$$

Die Integration ist dabei über die Umgebung der retardierten Nullstelle von σ auf der Bahnkurve zu erstrecken.

Die Verallgemeinerung besteht nun darin, die δ -Funktion durch eine Zackenfunktion endlicher Breite und Höhe zu ersetzen:

$$(2) \quad \delta(\sigma) \longrightarrow f(\sigma), \quad \int f(\sigma) d\sigma = 1.$$

Eine solche wird z. B. nahegelegt, wenn man das Singularitätenproblem durch eine körnige Struktur des Raumes zu lösen hofft³⁾.

1) Vgl. z. B. G. Mie, Ann. d. Phys. [4] 37. S. 511. 1912; M. Born, Proc. Roy. Soc. London 143. S. 410. 1934; weitere Angaben vgl. folgende Anm.

2) F. Bopp, Ann. d. Phys. [5] 39. S. 345. 1940.

3) Vgl. den zusammenfassenden Bericht von A. March, Naturw. 31. S. 49. 1943, in dem die Verträglichkeit ähnlicher Ansätze mit der Hypothese eines Raumes endlicher Auflösung behauptet wird.

Die verallgemeinerten Potentiale lauten also:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_{\mu}(x) = \frac{2e_0}{c} \int_{\text{ret.}} q_{\mu}(s) f(\sigma) ds, \\ \sigma = \frac{1}{c^2} (x_{\mu} - q_{\mu}(s), \quad x_{\mu} - q_{\mu}(s)). \end{array} \right.$$

Wir werden zeigen, daß sich die früher betrachtete spezielle lineare Theorie dieser allgemeinen Form unterordnet.

Die Wahl der Integrationsgrenzen bietet dabei noch eine gewisse Schwierigkeit. Nach dem Kausalitätsprinzip darf die Integration nur über vergangene Zeiten erstreckt werden, d. h. zunächst über alle Bahnkurven im Nachkegel, also über alle s für die $\sigma(s) \leq 0$ und $t > t_0$ ist. Wenn man dabei stehen bleibt — wir werden gleich zeigen, welche Folgen das hat — so bedeutet dies, daß sich alle Wirkungen nur mit Unterlichtgeschwindigkeit ausbreiten. So selbstverständlich diese Forderung im ersten Augenblick erscheint, so vorsichtig wird man sie aufnehmen, wenn man an eine Diracsche Bemerkung auf Grund der klassischen Theorie des Elektrons denkt, nach der sich Wirkungen im Elektron mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten sollten. Auch eine Theorie des Elektrons, in der Wellen vom Yukawaschen Typ vorkommen, läßt Wirkungen vermuten, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten.

Wenn das richtig wäre, müßten auch Bahnelemente zwischen den Kegeln zur Wirkung beitragen. Solche Elemente haben jedoch die Eigenschaft, daß sie nicht mehr in jedem Koordinatensystem gegenüber dem Aufpunkt der Vergangenheit angehören. Eine invariante Formulierung der Grenzen ist in diesem Fall nur möglich in bezug auf ein physikalisch ausgezeichnetes Koordinatensystem. Als solches bietet sich das mit dem Teilchen bewegte System. Wir integrieren also über alle Punkte der Vergangenheit beurteilt von einem im Elektron ruhenden Koordinatensystem. Das Kausalitätsprinzip ist offenbar erfüllt. Die Ursache liegt von dem System aus gesehen, in dem sie zur Wirkung kommt, in der Vergangenheit.

In mathematischer Formulierung lautet dies mit Rücksicht darauf, daß zwei Weltpunkte in ein bestimmtes Koordinatensystem zur selben Zeit gehören, wenn der sie verbindende Vierervektor zur Vierergeschwindigkeit des Koordinatensystems senkrecht steht:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_{\mu}(x) = \frac{2e_0}{c^2} \int_{-\infty}^{s_0} q_{\mu}(s) f(\sigma) ds, \\ \dot{\sigma}(s_0) = -\frac{2}{c^2} (x_{\mu} - q_{\mu}(s_0), \quad q_{\mu}(s_0)) = 0. \end{array} \right.$$

Dabei ist s_0 vermöge der Gleichung $\dot{\sigma} = 0$ eine Funktion des Aufpunkts.

Eine *Einengung* der Integrationsgrenzen, die zu Gl. (3) zurückführt, ergibt sich aus der Forderung, daß das verallgemeinerte Potential genau wie das

Maxwellsche in der vorliegenden Darstellung in Gl. (1) der Divergenzbedingung

$$(5) \quad \frac{\partial \varphi_\mu(x)}{\partial x_\mu} = 0$$

genügen soll. Aus

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{2e_0}{c^2} \left\{ \dot{q}_\mu(s_0) f(\sigma_0) \frac{\partial s_0}{\partial x_\mu} + \int_{-\infty}^{s_0} \dot{q}_\mu \frac{\partial \sigma}{\partial x_\mu} f(\sigma) d\sigma \right\}$$

folgt nämlich mit Rücksicht auf $q_\mu \frac{\partial \sigma}{\partial x_\mu} = -\dot{q}_\mu \frac{\partial \sigma}{\partial q_\mu} = -\dot{\sigma}$:

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{2e_0}{c^2} \left\{ \left(\dot{q}_\mu(s_0) \frac{\partial s_0}{\partial x_\mu} - 1 \right) f(\sigma_0) + f(-\infty) \right\}.$$

Aus Gl. (2) folgt $f(-\infty) = 0$, aus $\sigma(s_0) = 0$ erhält man

$$\dot{q}_\mu(s_0) \frac{\partial s_0}{\partial x_\mu} = 0 \quad \text{oder} \quad \dot{q}_\mu(s_0) \frac{\partial s_0}{\partial x_\mu} = \frac{1}{1 + \frac{1}{c^2} (x_\mu - q_\mu(s_0), \ddot{q}_\mu(s_0))},$$

so daß

$$(6) \quad \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\mu} = -\frac{2e_0}{c^4} \frac{(x_\mu - q_\mu(s_0), \ddot{q}_\mu(s_0))}{1 + \frac{1}{c^2} (x_\mu - q_\mu(s_0), \ddot{q}_\mu(s_0))} f(\sigma_0)$$

ist. Im allgemeinen wird $(x_\mu - q_\mu, \ddot{q}_\mu)$ nicht zugleich mit $(x_\mu - q_\mu, \dot{q}_\mu)$ verschwinden. Die Divergenz kann also nur dann Null sein, wenn $f(\sigma_0)$ für alle

$$\sigma_0 = \frac{1}{c^2} (x_\mu - q_\mu(s_0), x_\mu - q_\mu(s_0))$$

mit

$$(x_\mu - q_\mu(s_0), \dot{q}_\mu(s_0)) = 0$$

verschwindet, d. h. z. B. für alle $x_\mu = q_\mu(s_0) + \lambda \xi_\mu$, für die $\xi_\mu \dot{q}_\mu(s_0) = 0$ ist, oder für alle $\sigma_0 = \frac{\lambda^2}{c^2} \xi_\mu^2$. Da ξ_μ ein raumartiger Vektor ist (als orthogonaler zum zeitartigen Vektor \dot{q}_μ), ist $\xi_\mu^2 > 0$ und $f(\sigma) = 0$ für alle positiven Werte von σ .

Unsere Forderung, daß die Potentialdivergenz verschwinden soll, führt also zwangsläufig zur erstgenannten üblichen Randbedingung, die nur Wirkungen aus dem Nachkegel zuläßt. Es ist

$$(7a) \quad \varphi_\mu(x) = \frac{2e_0}{c^2} \int_{-\infty}^{s_0} \dot{q}_\mu(s) f(\sigma) d\sigma$$

mit

$$(7b) \quad \sigma_0 = \frac{1}{c^2} (x_\mu - q_\mu(s_0), x_\mu - q_\mu(s_0)) = 0, \quad t_0(s_0) < t.$$

Denken wir uns s als Funktion von σ geschrieben, so lauten die Potentiale

$$\varphi_\mu = \frac{2e_0}{c^2} \int_{-\infty}^0 \frac{\dot{q}_\mu}{\dot{\sigma}} f(\sigma) d\sigma$$

und ihre Ableitungen

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{2e_0}{c^2} \int_{-\infty}^0 \left\{ \left(\ddot{q}_\mu - \dot{q}_\mu \frac{\ddot{\sigma}}{\dot{\sigma}} \right) \frac{\partial s}{\partial x_\nu} - \frac{\dot{q}_\mu}{\dot{\sigma}} \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial x_\nu} \right\} f(\sigma) \frac{d\sigma}{\dot{\sigma}}.$$

Aus $\sigma = \frac{1}{c^2} (x_\mu - q_\mu, x_\mu - q_\mu) = \text{const}$ folgt:

$$\frac{\partial s}{\partial x_\mu} = - \frac{2(x_\mu - q_\mu)}{c^2 \dot{\sigma}}, \quad \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial x_\mu} = - \frac{2}{c^2} \dot{q}_\mu$$

und

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu} = - \frac{4e_0}{c^4} \int_{-\infty}^0 \frac{d}{ds} \left\{ \frac{(x_\nu - q_\nu, \dot{q}_\mu)}{\dot{\sigma}} \right\} f(\sigma) \frac{d\sigma}{\dot{\sigma}}.$$

Erstens ergibt sich daraus wegen $(x'_\mu - q_\mu, \dot{q}_\mu) = -\frac{c^2}{2} \dot{\sigma}$ tatsächlich die Divergenzbedingung

$$(8) \quad \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\mu} = 0.$$

Zweitens erhält man für die Feldstärke den Ausdruck

$$(9) \quad f_{\mu\nu} = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{4e_0}{c^4} \int_{\substack{\sigma < 0 \\ t_0 < t}} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{(x_\nu - q_\nu, \dot{q}_\mu) - (x_\mu - q_\mu, \dot{q}_\nu)}{\dot{\sigma}} \right\} f(\sigma) ds.$$

§ 2. Das statische Potential

Zunächst betrachten wir einige spezielle Beispiele und orientieren uns dabei am statischen Potential, dem Potential für das ruhende Teilchen ($\mathbf{r}_0 = 0$, $t_0 = s$). Wir setzen $\varphi_s = i\varphi$ und wählen t_0 als Integrationsparameter. Dann ist

$$(10) \quad \varphi = \frac{2e_0}{c} \int f(\sigma) dt_0$$

oder

$$(11) \quad \varphi(r) = \frac{e_0}{c} \int_{-\infty}^0 \frac{f(\sigma) d\sigma}{\sqrt{-\sigma + \frac{r^2}{c^2}}}.$$

1. Beispiel:

$$(12a) \quad f(\sigma) = \delta(\sigma + \sigma_0); \quad \varphi(r) = \frac{e_0}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_0 c^2}{r^2}}}.$$

2. Beispiel:

$$f(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma \leq -\sigma_0; \\ \frac{1}{\sigma_0} & \text{„ } \sigma \geq -\sigma_0; \end{cases}$$

$$\varphi(r) = \frac{e_0}{c\sigma_0} \int_0^{\sigma_0} \frac{dt}{\sqrt{t + \frac{r^2}{c^2}}} = \frac{2e_0}{c\sigma_0} \left(\sqrt{t + \frac{r^2}{c^2}} \right) \Big|_0^{\sigma_0}$$

also

$$(12b) \quad \varphi(r) = \frac{2e_0 r}{c^2} \left(\sqrt{1 + \frac{c_0 c^2}{r^2}} - 1 \right).$$

$$3. \text{ Beispiel: } f(\sigma) = \frac{r}{2} \frac{J_1(r\sqrt{-\sigma})}{\sqrt{-\sigma}}.$$

Aus Gl. (11) folgt:

$$\varphi(r) = \frac{r c_0}{c} \int_0^\infty \frac{J_1(r\sqrt{-\sigma})}{\sqrt{-\sigma + \frac{r^2}{c^2}}} d\sqrt{-\sigma}$$

oder mit $\frac{r r'}{c} = \varrho$:

$$\varphi(r) = \frac{r c_0}{c} g(\varrho), \quad g(\varrho) = \int_0^1 \frac{J_1(\varrho \sqrt{t^2 + \varphi^2})}{\sqrt{t^2 + \varphi^2}} dt.$$

Die Funktion $g(\varrho)$ genügt einer einfachen Differentialgleichung. Es ist, wie man leicht durch mehrmalige partielle Integration beweist,

$$(\varrho g'(\varrho))' = -1 + \varrho g'(\varrho).$$

Daraus folgt:

$$\varrho g(\varrho) = 1 + A e^{-\varrho} + B e^{+\varrho}.$$

Durch direkte Integration erhält man in den Grenzfällen

$$\varrho \rightarrow \infty : g \rightarrow \frac{1}{\varphi}, \quad \text{d. h. } B = 0,$$

$$\varrho = 0 : g \neq \infty, \quad \text{d. h. } A = -1,$$

also ist

$$g(\varrho) = \frac{1 - e^{-\varrho}}{\varphi}$$

und

$$(12c) \quad \varphi(r) = \frac{c_0}{r} \left(1 - e^{-r \frac{r'}{c}} \right).$$

Dieses Potential stimmt mit dem der früher angegebenen (a. a. O. S. 575, Anm. 2) speziellen Theorie überein. Wir werden noch ausdrücklich zeigen, daß der letzte Ansatz für $f(\sigma)$ mit jener identisch ist.

Das dritte Beispiel führt auf die umgekehrte Fragestellung: Wie lautet die Grundfunktion $f(\sigma)$ bei gegebenem statischen Potential $\varphi(r)$? Die Antwort ist in diesem Fall bereits vorweggenommen. Die systematische Behandlung führt zu der Aufgabe, die Integralgleichung (11) für $f(\sigma)$ zu lösen. Sie ist von der Form:

$$(13) \quad G(s) = \int_0^\infty \frac{F(t) dt}{\sqrt{t^2 + s}},$$

wenn wir

$$(14) \quad \begin{cases} \sigma = -t, & r = c\sqrt{s}; \\ f(\sigma) = F(t), & \varphi(r) = \frac{c_0}{c} G(s) \end{cases}$$

setzen.

Die Auflösung wird einfacher bei Erstreckung der Integration in Gl. (13) bis zu den natürlichen Grenzen. Wir betrachten darum zunächst die Integralgleichung:

$$(15) \quad G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t) dt}{\sqrt{t+s}}.$$

Dieses bedeutet keine wesentliche Abänderung. Denn wenn $F(t)$ eine Lösung der Gl. (13) ist, dann gibt es bei gleicher Funktion $G(s)$ eine Lösung der Gl. (15), die oberhalb $t=0$ mit der gesuchten Funktion übereinstimmt und unterhalb verschwindet. Die Eindeutigkeit der Lösung stellt dann ihre Notwendigkeit sicher.

Die Lösung der Integralgleichung ist nun mittels der Eigenfunktionen

$$(16) \quad F_{\lambda}^0(t) = e^{i\lambda t}$$

leicht zu bestimmen. Die Integraltransformation in Gl. (15) macht daraus die Funktionen¹⁾

$$(17) \quad G_{\lambda}(s) = \lambda_2 e^{-i\lambda s} \quad \text{mit} \quad \lambda_2 = 2 \int_0^{\infty} e^{i\lambda \xi} d\xi = \sqrt{\frac{i\pi}{k}}.$$

Wenn nun die Fourierentwicklung der Funktion $G(s)$ auf der linken Seite von Gl. (15)

$$(18) \quad G(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\lambda} e^{-i\lambda s} d\lambda$$

gegeben ist, dann lautet die Lösung der Integralgleichung

$$(19) \quad F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G_{\lambda}}{\lambda_2} e^{i\lambda t} d\lambda.$$

Betrachten wir z. B. das Coulombpotential $\varphi = \frac{e_0}{r}$, dann ist

$$G = \frac{e}{e_0} \cdot \frac{e_0}{c\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{s}},$$

und die Fourierkomponenten dieser Funktion lauten

$$(20) \quad G_{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} e^{i\lambda s} ds = \frac{\lambda_2}{2\pi}.$$

1) Integrale ähnlich dem in λ_2 werden im folgenden stets gemäß

$$\int_0^{\infty} e^{i\lambda \xi} d\xi = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{i\lambda \xi} - r\xi d\xi$$

berechnet.

[Dabei ist für $s < 0$ $G(s) = 0$ gesetzt]. Nach Gl. (19) ist also

$$(21) \quad F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iks} dt = \delta(t)$$

und damit auch $f(\sigma) = \delta(\sigma)$, was dem Diracschen Ansatz entspricht.

Weniger trivial ist das im dritten Beispiel behandelte Potential

$$(22) \quad \varphi = \frac{e_0}{r} (1 - e^{-\gamma r}), \quad G(s) = \frac{1 - e^{-\gamma \sqrt{s}}}{\sqrt{s}}, \quad (\gamma = \kappa c).$$

Die Entwicklungskoeffizienten haben die Form

$$(23) \quad G_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-\gamma \sqrt{s}}}{\sqrt{s}} e^{iks} ds.$$

Wir betrachten zunächst

$$(24) \quad A_k(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\gamma \sqrt{s}}}{\sqrt{s}} e^{iks} ds.$$

G_k ist dann einfach

$$(25) \quad G_k = A_k(0) - A_k(\gamma).$$

Die Transformation

$$(26) \quad \begin{cases} s = \left(\frac{t}{\sqrt{-ik}} + \frac{\gamma}{2ik} \right)^2, & ds = 2 \left(\frac{t}{\sqrt{-ik}} + \frac{\gamma}{2ik} \right) \frac{dt}{\sqrt{-ik}}, \\ t = \sqrt{-iks} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{-4ik}} \end{cases}$$

verwandelt den Ausdruck (24) in

$$A_k(\gamma) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{i}{k}} e^{\frac{i\gamma^2}{4k}} \int_{C_\gamma} e^{-t^2} dt,$$

wobei der Integrationsweg C_γ in nachstehender t -Ebene (Abb. 1) eingetragen ist. $A_k(0)$ ergibt sich dann durch Integration über den Weg C_0 und G_k ist mit Rücksicht auf das Verschwinden des Integrals über C_∞ gleich dem Integral über $C_0 + C_\infty - C_\gamma$. Das ist wegen der Singularitätenfreiheit des Integranden im Endlichen gleich dem Integral über den Weg C , also

$$(27) \quad G_k = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{i}{k}} e^{\frac{i\gamma^2}{4k}} \int_0^{\sqrt{\frac{i\gamma^2}{4k}}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{i}{\pi k}} e^{\frac{i\gamma^2}{4k}} \Phi \left(\sqrt{\frac{i\gamma^2}{4k}} \right),$$

worin Φ die Fehlerfunktion bedeutet.

Die gesuchte Funktion $F(t)$ folgt nach Gl. (19) aus

$$\frac{G_k}{k} = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{i\gamma^2}{4k}} \Phi \left(\sqrt{\frac{i\gamma^2}{4k}} \right),$$

Mit Rücksicht auf $z = r \sqrt{t(1-s^2)}$ ist also

$$A = 2i \sqrt{2\pi i} \frac{\sin r \sqrt{t(1-s^2)}}{\sqrt{r} \sqrt{t(1-s^2)}}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in Gl. (28) ein, so ergibt sich

$$F(t) = \frac{r}{\pi \sqrt{t}} \int_0^1 \sin r \sqrt{t(1-s^2)} ds = \frac{r}{\pi \sqrt{t}} \int_0^{\pi/2} \sin r (\sqrt{t} \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi,$$

oder

$$(29) \quad F(t) = \frac{r}{2} \frac{J_1(r \sqrt{t})}{\sqrt{t}}, \quad f(\sigma) = \frac{\pi c}{2} \frac{J_1(\pi c \sqrt{-\sigma})}{\sqrt{-\sigma}}.$$

§ 3. Die Wellen- und Feldgleichungen

Die Wellengleichung für obige Potentiale kann man im allgemeinen nicht mehr als Differentialgleichung darstellen. Dagegen existiert immer eine Integralgleichung von der Form

$$(30) \quad (K, \varphi_\mu) = -\frac{4\pi}{c} s_\mu,$$

das ist explizit¹⁾

$$(31) \quad \int K(x, x') \varphi_\mu(x') d^4 x' = -4\pi i e_0 \int \dot{q}_\mu(s) \delta(x - q(s)) ds.$$

Zur Bestimmung von K machen wir den Ansatz

$$(32) \quad K(x, x') = -\frac{ic}{16\pi^4} \int A(k) e^{ik_\mu(x_\mu - x'_\mu)} d^4 k$$

und beachten, daß

$$(33) \quad \delta(x - x') = -\frac{ic}{16\pi^4} \int e^{ik_\mu(x_\mu - x'_\mu)} d^4 k$$

ist. Durch Einsetzung dieser Ausdrücke in Gl. (31) erhält man, daß diese erfüllt ist, wenn wir

$$(34) \quad -\frac{2\pi ic^2}{A(k)} = \int e^{-ik_\mu(x_\mu - x'_\mu)} f(\sigma) d^4 x$$

setzen. Mit

$$|r - r_0| = R, \quad (t - t_0) = \tau, \quad (k_1 \dots k_3) = \left(k, \frac{i\omega}{c}\right)$$

folgt daraus

$$\frac{-c}{A(k)} = \int e^{-i(kR\zeta - \omega\tau)} f\left(\frac{R^2}{c^2} - \tau^2\right) R^2 dR d\zeta d\tau.$$

Die Integration über ζ und R läßt sich durchführen. Die Integration über ζ ergibt:

$$(35) \quad \frac{1}{A} = +\frac{1}{k^2} \int d\sigma f(\sigma) \int_0^\infty \frac{e^{\frac{i\omega}{kc} \sqrt{t^2 - \sigma k^2 c^2}}}{\sqrt{t^2 - \sigma k^2 c^2}} \sin t \cdot t dt.$$

1) $d^4 x = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$, $d^4 k = dk_1 dk_2 dk_3 dk_4$;

$x_0 = -ix_4 = ct$, $k_0 = -ik_4 = \frac{\omega}{c}$.

Das innere Integral, — mit den Abkürzungen

$$\alpha = \frac{\omega}{kc}, \quad t_0^2 = -\sigma k^2 c^2$$

lautet es:

$$(36) \quad J = \int_0^\infty \frac{e^{i\alpha} \sqrt{t^2 + t_0^2}}{\sqrt{t^2 + t_0^2}} \sin t \cdot t dt = \int_{t_0}^\infty e^{i\alpha t} \sin \sqrt{t^2 - t_0^2} dt, —$$

kann man durch Reihenentwicklung ausrechnen. Durch Entwicklung der Wurzel erhält man zunächst, wenn wir $t = t_0 \cdot w$ setzen:

$$J = \sum \frac{\sqrt{-1}}{(2n+1)!} t_0^{2n+2} \int_1^\infty (1-w^2)^{n+\frac{1}{2}} e^{i\alpha t_0 w} dw \\ = -\frac{\sqrt{-\pi}}{2\alpha} t_0 \sum \frac{1}{n!} \left(\frac{t_0}{2\alpha}\right)^n H_{n+1}^{(1)}(\alpha t_0).$$

Die Summation ergibt

$$(37) \quad J = + \frac{i\pi}{2} k^2 c^2 \sqrt{-\sigma} \frac{H_1^{(1)}(\sqrt{\omega^2 - k^2 c^2} \sqrt{-\sigma})}{\sqrt{\omega^2 - k^2 c^2}},$$

so daß man für die Fourierkoeffizienten A den Ausdruck

$$(38) \quad A(k) = \frac{2}{i\pi c^2} \frac{\sqrt{\omega^2 - k^2 c^2}}{\int H_1^{(1)}(\sqrt{\omega^2 - k^2 c^2} \sqrt{-\sigma}) f(\sigma) d\sigma}$$

erhält.

Einen bemerkenswerten Zusammenhang zwischen den Funktionen K und f erhält man, wenn man Gl. (31) mit

$$f\left(\frac{1}{c^2} (x_\mu^0 - x'_\mu)^2\right)$$

multipliziert und über x im Bereich des Nachkegels von x^0 integriert. Die rechte Seite der Gleichung ist dann dem Viererpotential proportional, der Operator auf der linken muß also bis auf einen Faktor durch die Diracsche δ -Funktion gegeben sein. Es ist

$$(39) \quad \int_{\text{ret.}} f\left(\frac{(x_\mu^0 - x'_\mu)^2}{c^2}\right) K(x' - x) d^4 x' = -2\pi i c^2 \delta(x^0 - x).$$

Die Funktionen K und f stellen also für retardierte Potentiale reziproke Integralkerne dar.

Wir wollen den Operator K für die beiden folgenden Sonderfälle berechnen:

$$(40) \quad \text{I: } f(\sigma) = \delta(\sigma); \quad \text{II: } f(\sigma) = \frac{\gamma}{2} \frac{J_1(\gamma \sqrt{-\sigma})}{\sqrt{-\sigma}}.$$

Im ersten Fall ist

$$\int H_1^{(1)} (\sqrt{\omega^2 - k^2 c^2} \sqrt{-\sigma}) f(\sigma) \sqrt{-\sigma} d\sigma = \frac{2}{i\pi} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - k^2 c^2}},$$

also

$$(41_l) \quad A = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2.$$

Daraus folgt mittels partieller Integrationen

$$\int K(x, x') \varphi_\mu(x') d^4 x' = + \frac{ic}{16\pi^4} \int k_\mu^2 \cdot e^{ik_\mu(x_\mu - x'_\mu)} \varphi_\mu(x') d^4 k d^4 x' = \square \varphi_\mu(x),$$

das heißt

$$(42_l) \quad (K, \varphi_\mu) = \square \varphi_\mu.$$

Man erhält also den Differentialausdruck der Maxwell'schen Elektrodynamik.

Im zweiten Fall lautet das Integral im Nenner von Gl. (38), wenn wir $\sqrt{\sigma} = t$ setzen:

$$\int = \gamma \int H_1^{(1)}(i\alpha t) J_1(\gamma t) t dt = - \frac{2\gamma^2}{\pi\alpha(\alpha^2 + \gamma^2)}.$$

Es ist also

$$A = \frac{-1}{\gamma^2 c^2} \alpha^2 (\alpha^2 + \gamma^2)$$

oder

$$(41_n) \quad A = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \left(1 - \frac{c^2}{\gamma^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \right).$$

Das führt ähnlich wie oben zu dem Operator

$$(42_n) \quad (K, \varphi_\mu) = \square \left(1 - \frac{\gamma^2}{c^2} \square \right) \varphi_\mu.$$

Damit ist die völlige Identität des zweiten Ansatzes mit unserer früheren Theorie nachgewiesen.

Im Hinblick auf die frühere Theorie erhält man eine bemerkenswerte Schreibweise, wenn man ganz allgemein

$$(43) \quad A = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) A_0(k)$$

setzt und analog zu Gl. (32) als zugehörigen Integraloperator

$$(44) \quad s(x - x') = - \frac{ic}{16\pi^4} \int A_0(k) e^{ik_\mu(x_\mu - x'_\mu)} d^4 k$$

einführt. Für die durch die Gleichungen

$$(45) \quad f_{\mu\nu} = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu}, \quad F_{\mu\nu} = (s, f_{\mu\nu})$$

definierten Tensoren der Feldstärke und Felderregung gelten dann gerade die Mieschen Feldgleichungen

$$(46) \quad \frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial f_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial f_{\lambda\nu}}{\partial x_\mu} = 0, \quad \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} s_\mu.$$

Denn

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = -(s, \square \varphi_\mu) = -(K, \varphi_\mu) = \frac{4\pi}{c} s_\mu.$$

Die Polarisation des Vakuums in einem Punkt ist also ganz allgemein durch die Feldstärke in seiner Umgebung bestimmt.

Die linearen Formen der Mieschen Theorie lassen sich, wie das im Sonderfall bereits früher geschehen ist, noch enger an die Maxwell'sche Theorie anschließen. Für die Potentiale

$$(47) \quad \Phi_\mu = (\varepsilon, \varphi_\mu)$$

gelten nämlich die Maxwell'schen Gleichungen

$$(48) \quad F_{\mu\nu} = \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial x_\nu}, \quad \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} s_\mu.$$

Die Kraftwirkungen berechnen sich jedoch nicht aus den Feldgrößen F , sondern aus der Feldstärke¹⁾

$$(49) \quad f_{\mu\nu} = (\varepsilon^{-1}, F_{\mu\nu}).$$

Darin bedeutet

$$(50) \quad \varepsilon^{-1}(x - x') = -\frac{ic}{16\pi^4} \int \frac{1}{A_0(k)} e^{i(k_\mu x_\mu - x'_\mu x'_\mu)} d^4 k.$$

§ 4. Die Bewegungsgleichungen

Die gewöhnliche Ableitung der Bewegungsgleichungen in einer Feldtheorie geht von dem Energie-Impuls-Satz aus, den man in unserem Fall etwa in der Form

$$(51) \quad \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = f_{\mu\nu} s_\nu$$

schreiben müßte. Auf der linken Seite steht die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors $T_{\mu\nu}$, auf der rechten die Lorentzsche Kraftdichte. Die Bewegungsgleichungen folgen dann aus der Forderung, daß die Singularitäten der Teilchen nicht an dem Energieumsatz beteiligt seien, daß also durch eine kleine Kugelfläche um die Singularitäten weder Energie noch Impuls fließt. Dies bedeutet, daß die mittlere Lorentzkraft in einem beliebig kleinen Volumen um die Singularitäten verschwinden muß. Die Bewegungsgleichungen lauten in diesem Fall also

$$(52) \quad \int_{\text{sing.}} f_{\mu\nu} s_\nu d\tau = 0.$$

1) Bilden wir die Divergenz von Gl. (49), so steht links die Dichte des scheinbaren Viererstroms φ_μ , rechts die des wahren:

$$\varphi_\mu(x) = (\varepsilon^{-1}, s_\mu(x)) = \frac{1}{ic} \int \varepsilon^{-1}(x - x') s_\mu(x') dx'.$$

In dieser Form wurde die Gleichung für einen speziellen, aus der Theorie des Positrons stammenden Ansatz von R. Gerber behandelt [Phys. Rev. 48. S. 49. 1935. Gl. (13)]. Vgl. auch die anschließende Arbeit von E. A. Uehling, Phys. Rev. 48. S. 55. 1935, über den gleichen Gegenstand.

In unserem früheren Beispiel setzt sich der Energie-Impuls-Tensor aus zwei Termen zusammen, dem Maxwell'schen Anteil und dem Proca-Yukawaschen Anteil. Aus dem hier diskutierten Ansatz für die Feldgleichungen wird er im allgemeinen nicht mehr in einfacher Weise folgen. Wenn sich Energie und Impuls überhaupt noch räumlich lokalisieren lassen, wird dies in vielen Fällen wahrscheinlich nur noch über eine Reihe unendlich vieler Terme möglich sein. Gleichwohl können wir das Verschwinden der mittleren Lorentzkraft in der Umgebung der Singularitäten fordern. Die Kraft auf eine einzelne Singularität lautet danach:

$$(53) \quad \mathfrak{K} = e_0 \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathfrak{B}] \right).$$

Falls überhaupt nur ein Teilchen vorhanden ist, ergeben sich nach Gl. (9) folgende Feldstärken:

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E} = -\frac{2e_0}{c^2} \int \frac{d}{dt_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - (t - t_0)\mathbf{v}}{\frac{1}{c^2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{v}) - (t - t_0)} \right) f(\sigma) dt_0, \\ \mathfrak{B} = +\frac{2e_0}{c^2} \int \frac{d}{dt_0} \left(\frac{[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{v}]}{\frac{1}{c^2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{v}) - (t - t_0)} \right) f(\sigma) dt_0, \end{array} \right.$$

so daß die Bewegungsgleichungen für das einzelne Teilchen im leeren Raum mit $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t)$, $\mathbf{r}_0' = \dot{\mathbf{r}}_0(t)$ usw. folgende Form annehmen:

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{K} = \frac{2e_0^2}{c^2} \int_{-\infty}^t \frac{d}{dt'} \cdot \left(\frac{(t-t')\mathbf{v}' - \left(1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}'}{c^2}\right)(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0') - \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0')\mathbf{v}'}{\frac{1}{c^2}(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0', \mathbf{v}') - (t - t')} \right) \\ f(\sigma) dt' = 0. \end{array} \right.$$

Nach partieller Integration erhält man, wenn man $t' = t - \tau$ setzt und beachtet, daß der Ausdruck in der geschweiften Klammer für $\tau = 0$ verschwindet:

$$(56) \quad \mathfrak{K} = \frac{4e_0^2}{c^2} \int_0^\infty \left\{ \tau \mathbf{v}' - \left(1 - \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}'}{c^2}\right)(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0') - \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}, \mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0')\mathbf{v}' \right\} f(\sigma) d\tau = 0$$

mit

$$(57) \quad \sigma = \frac{1}{c^2}(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0')^2 - \tau^2 = -(1 - \beta^2)\tau^2 + \frac{1}{c^2}((\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_0')^2 - \mathbf{v}^2\tau^2).$$

Gl. (55) hat die bereits in der früheren Gl. (12) (a. a. O. S. 575 Anm. 2 § 3) angegebene Gestalt

$$(58) \quad \frac{\partial \mathfrak{p}}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}_0},$$

wenn wir

$$(59) \quad \begin{cases} \varphi = \frac{e_0}{c} a(\tau_0) = \frac{2e_0^2}{c^3} \int_{-\infty}^{\tau} v' f(\sigma) d\tau, \\ \Phi = e_0 \left(\varphi_0(\tau_0) - \frac{v a(\tau_0)}{c} \right) = \frac{2e_0^2}{c^3} \int_{-\infty}^{\tau} \left(1 - \frac{v v'}{c^2} \right) f(\sigma) d\tau \end{cases}$$

setzen.

Die Entwicklung des Integranden in Gl. (56) nach der Retardierung τ führt in den ersten Näherungsschritten zu den bekannten Gliedern der Bewegungsgleichungen: gewöhnliche Trägheits- und gewöhnliche Strahlungskraft. Die geschweifte Klammer im Integranden beginnt erst mit Gliedern der Ordnung τ^2 . Der Unterschied von τ gegen $-(1-\beta^2)\tau^2$ ist nach Gl. (57) von der Größenordnung τ^2 . In erster Näherung folgt also aus Gl. (56):

$$\mathfrak{R}_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{1-\beta^2} \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \int f'(-(1-\beta^2)\tau^2) \tau^2 d\tau,$$

nach partieller Integration erhält man die gewöhnliche Trägheitskraft:

$$(60) \quad \mathfrak{R}_1 = -\frac{d}{dt} \frac{m v}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad m = \frac{e_0^2}{c^3} \int_0^{\infty} f(-\tau^2) d\tau.$$

Die Ruhmasse m hängt von der speziellen Gestalt der Funktion f ab. Im Maxwell'schen Grenzfall $f(\sigma) = \delta(\sigma)$ divergiert das Integral bekanntlich, in unserm früheren Beispiel $f(\sigma) = \frac{\gamma}{2} \frac{J_1(\sqrt{-\sigma})}{\sqrt{-\sigma}}$ ist $m = \frac{\gamma e_0^2}{2c^3}$.

In nächster Näherung erhält man die Strahlungskraft. Dieser Beitrag setzt sich aus zwei Anteilen zusammen. Der erste führt von der Weiterentwicklung der geschweiften Klammer in Gl. (56) her und lautet:

$$\mathfrak{R}_1' = \frac{4}{3} \frac{e_0^2}{c^3} \left((1-\beta^2) \ddot{v} + \frac{v \ddot{v}}{c^2} v \right) \int f'(-(1-\beta^2)\tau^2) \tau^2 d\tau.$$

Er führt zu dem Ausdruck

$$(61) \quad \mathfrak{R}_1' = \frac{2}{3} \frac{e_0^2}{c^3} \left(\frac{\ddot{v}}{1-\beta^2} + \frac{1}{c^2} \frac{(v \ddot{v}) v}{(1-\beta^2)^2} \right).$$

Den andern Anteil liefert das zweite Entwicklungsglied der Funktion f , und zwar erhält man aus $f'(\sigma) = f'(-(1-\beta^2)\tau^2) - f''(-(1-\beta^2)\tau^2) \frac{v \dot{v}}{c^2} \tau^2 + \dots$:

$$\mathfrak{R}_1'' = \frac{4}{3} \frac{e_0^2}{c^3} \frac{v \dot{v}}{2c^2} \cdot \sqrt{1-\beta^2} \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}} \int f''(-(1-\beta^2)\tau^2) \tau^2 d\tau$$

oder

$$(62) \quad \mathfrak{R}_1'' = \frac{2e_0^2}{c^3} \frac{v \dot{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Beide Glieder zusammen ergeben gerade die Strahlungskraft:

$$(63) \quad \mathfrak{R}_1 = \frac{2}{3} \frac{e_0^2}{c^3} \left(\frac{\ddot{v}}{1-\beta^2} + \frac{1}{c^2} \frac{(v \ddot{v}) v}{(1-\beta^2)^2} + \frac{3}{c^3} \frac{(v \dot{v}) \ddot{v}}{1-\beta^2} + \frac{3}{c^4} \frac{(v \dot{v})^2 v}{(1-\beta^2)^2} \right).$$

In Viererschreibweise lauten die Gl. (60) und (63), wenn wir $\dot{q}_\mu(\sigma) = U_\mu$ setzen:

$$(64) \quad K_\mu^{(1)} = -m \frac{dU_\mu}{ds}; \quad K_\mu^{(2)} = \frac{2}{3} \frac{e_0^2}{c^3} \left(\frac{d^2 U_\mu}{ds^2} - \frac{1}{c^2} (U_\nu^2) U_\mu \right).$$

Die beiden angegebenen Näherungsstufen für die Bewegungsgleichung sind seit langem bekannt. Sie gelten für beliebige Ansätze $f(\sigma)$, wenn nur das Massenintegral in Gl. (60) konvergiert. Eine genauere, über die obige Näherung hinausgehende Diskussion führt jedoch zu einschränkenden Bedingungen für die Funktion $f(\sigma)$. Um dies zu zeigen, denken wir uns ein Elektron durch passend gewählte äußere Kräfte auf einer beliebig vorgegebenen Bahn geführt. In diesem Fall verschwindet die linke Seite von Gl. (56) natürlich nicht. Vielmehr gilt, wenn wir die zusätzlichen Kräfte mit \mathfrak{K}_a bezeichnen, $\mathfrak{K} + \mathfrak{K}_a = 0$, und die Arbeit, die diese zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 am Elektron leisten, beträgt:

$$(65) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta A &= \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{K}_a v dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{K} v dt \\ &= -\frac{4e_0^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_0^\infty (\tau v v' - (v, \tau_0 - \tau_0')) f'(\sigma) d\tau. \end{aligned} \right.$$

Diese Arbeit setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: einem *reversiblen* beliebigen Vorzeichens, der die Änderung der kinetischen Energie des Teilchens bewirkt, und einem *irreversiblen* zur Überwindung der Strahlungsdämpfung, der notwendig positiv sein muß, wenn man das Kausalitätsprinzip nicht verletzen will¹⁾. Um beide Energieanteile zu trennen, denken wir uns die herausgegriffene Bahnstrecke „quasistationär“ — das soll heißen „möglichst strahlungslos“ — geschlossen. In diesem Fall verschwindet der erste Anteil, und unsere Forderung an die Funktion $f(\sigma)$ lautet:

$$(66) \quad \oint dt \int_0^\infty (\tau v v' - (v, \tau_0 - \tau_0')) f'(\sigma) d\tau \leq 0.$$

Diese Ungleichung muß für beliebige geschlossene Bahnkurven gelten.

Der Nachweis der Existenz unmöglicher $f(\sigma)$ ist nunmehr leicht zu erbringen. Zunächst beschränken wir die Ungleichung (66) auf Kreisbahnen. Es sei

$$(67) \quad \mathbf{r}_0 = a(\cos \omega t, \sin \omega t, 0); \quad \mathbf{v} = a\omega(-\sin \omega t, \cos \omega t, 0).$$

1) Von der Möglichkeit einer Ausstrahlung auf Kosten der Masse wollen wir hier absehen. Ihre Berücksichtigung könnte den Einfluß der Bedingung (66) mildern.

Dann lautet unsere Bedingung

$$(68) \quad \int_0^{\infty} (\omega \tau \cos \omega \tau - \sin \omega \tau) f' \left(\frac{4a^2}{c^2} \sin^2 \frac{\omega \tau}{2} - \tau^2 \right) d\tau \leq 0.$$

Wählen wir als Funktion $f(\sigma)$ die des zweiten Beispiels auf S. 578, so ist $f(\sigma) = \frac{1}{\sigma_0} \delta(\sigma + \sigma_0)$, und die Ungleichung (68) nimmt folgende Form an:

$$(69) \quad \frac{\omega \tau_0 \cos \omega \tau_0 - \sin \omega \tau_0}{\omega \tau_0 - \beta^2 \sin \omega \tau_0} \leq 0 \quad \text{mit} \quad \tau_0^2 + \frac{4\beta^2}{\omega^2} \sin^2 \frac{\omega \tau_0}{2} = \sigma_0,$$

die offenbar keineswegs für alle a und ω gelten muß. Nehmen wir z. B. ω hinreichend groß und a sehr klein an, so daß $\omega \tau_0 > 1$ und $a < c\sqrt{\sigma_0}$ ist, so ist in beliebig guter Näherung $\tau_0 = \sqrt{\sigma_0}$ und der Ausdruck (69) hat, wenn ω um π/τ_0 variiert, beiderlei Vorzeichen. Für große Radien und kleine Frequenzen trifft jedoch Ungleichung (69) zu. In diesem Fall können wir uns auf die ersten Entwicklungsglieder von \mathfrak{K} beschränken, also auf die gewöhnliche Strahlungskraft, von der das geforderte Verhalten bekannt ist.

Der Beweis für die Verträglichkeit einer Funktion $f(\sigma)$ mit Bedingung (66) oder deren Konstruktion ist wegen des impliziten Charakters jeder Bedingung im allgemeinen nicht leicht möglich. Er läßt sich aber für das früher untersuchte Beispiel (a. a. O. S. 575, Anm. 2) erbringen, das zugleich einen Hinweis gibt, wie man die Frage systematisch behandeln kann. Dazu ist es zweckmäßig, die auf Dirac zurückgehende Zerlegung der Kraft mittels der avancierten Potentiale vorzunehmen. Sei \mathfrak{K} die oben aus den retardierten Feldern berechnete Kraft und \mathfrak{K}^* der entsprechende aus den avancierten Feldern folgende Ausdruck, so setzen wir mit Dirac und in Übereinstimmung mit unserem früheren Vorgehen

$$(70) \quad \mathfrak{K} = \mathfrak{K}_t + \mathfrak{K}_r, \quad \mathfrak{K}_t = \frac{1}{2} (\mathfrak{K} + \mathfrak{K}^*), \quad \mathfrak{K}_r = \frac{1}{2} (\mathfrak{K} - \mathfrak{K}^*).$$

Darin bedeuten \mathfrak{K}_t und \mathfrak{K}_r die vollständigen Ausdrücke für Trägheits- und Strahlungskraft. Daß \mathfrak{K}_t die Kraftwirkung des von der Materie losgelösten Strahlungsfeldes darstellt, erkennt man in folgender Weise. Retardiertes und avanciertes Potential gehören zur selben Ladungs- und Stromverteilung. Sie befriedigen also die Wellengleichung mit gleicher Inhomogenität, sei diese von singulärem oder stetigem Charakter. Ihre Differenz genügt darum der entsprechenden homogenen Gleichung, deren rechte Seite auch nicht in singulären Punkten von Null verschieden ist. Sie stellt darum ein zwar von der Materie erzeugtes, nunmehr aber von ihr unabhängiges Wellenfeld dar.

Wenn diese Deutung der Zerlegung richtig ist, darf ferner die Trägheitskraft \mathfrak{R} , zum Integral (66) keinen Beitrag liefern. Es muß also das Integral

$$(71) \quad A = \oint dt \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau v v' - (v, r_0 - r_0')) f'(\sigma) d\tau$$

verschwinden. (Die Erweiterung des Integrationsbereiches über negative Werte von τ ist nämlich gleichbedeutend mit der Addition der avancierten Lösung.) Die Transformation der Integrationsvariablen $\tau \rightarrow -\tau$ und $t \rightarrow t - \tau$ (also $t - \tau \rightarrow t$) liefert als Variante desselben Ausdrucks

$$(72) \quad A = - \oint dt \int_{-\infty}^{+\infty} (\tau v v' - (v', r_0 - r_0')) f'(\sigma) d\tau,$$

und die Addition der beiden letzten Gleichungen ergibt:

$$(73) \quad A = - \frac{1}{2} \oint dt \int_{-\infty}^{+\infty} (v - v', r_0 - r_0') f'(\sigma) d\tau.$$

Dieser Ausdruck verschwindet tatsächlich, denn es ist

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{2}{c^2} (v - v', r_0 - r_0')$$

und

$$(74) \quad A = - \frac{c^2}{4} \oint dt \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma) d\tau = 0.$$

Wir brauchen also die Ungleichung (66) nur für die Strahlungskraft zu bestätigen. Die Trägheitskraft liefert keinen Beitrag. In der oben angefangenen Entwicklung nach τ können darum nur die ungeraden Reihenglieder beitragen. Diese haben Faktoren der Form

$$(75) \quad s_n = \int_0^{\infty} \tau^{2n+1} f(-\tau^2) d\tau.$$

Der erste $s_0 = \frac{1}{2}$ geht in den Ausdruck für \mathfrak{R}_2 in Gl. (63) ein. Er ist von der speziellen Form der Funktion $f(\sigma)$ wegen der Normierungsbedingung (2) unabhängig. Die folgenden „Strahlungsfaktoren“ verschwinden im Fall unseres früheren Beispiels [Beispiel (3) S. 579]:

$$(76) \quad f(\sigma) = \frac{\gamma}{2} \frac{J_1(\gamma \sqrt{1-\sigma})}{\sqrt{1-\sigma}}.$$

Dies bedeutet, daß \mathfrak{R}_2 in dem speziellen Fall bereits den vollständigen Ausdruck für die Strahlungskraft darstellt. Bedingung (66) ist darum trivialerweise erfüllt.

Die Rechnung läuft folgendermaßen. Zunächst ist nach Gl. (75) und (76)

$$(77) \quad s_n = \frac{\gamma}{2} \int_0^{\infty} t^{2n+1} \frac{J_1(\gamma t)}{t} dt = \frac{s_n^0}{2\gamma^{2n}}$$

mit

$$(77') \quad s_n^0 = \int_0^{\infty} t^{2n} J_1(t) dt.$$

Mit Rücksicht auf die Beziehung $J_1 = -J_0'$ erhält man nach partieller Integration¹⁾ für $n \geq 1$

$$(78) \quad s_n^0 = 2n \int_0^{\infty} t^{2n-1} J_0(t) dt = 2n \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} t^{2n-1} J_0(t) e^{-\alpha t} dt.$$

In dem letzten Ausdruck ist der in der Anmerkung angedeutete Grensproß explizit angeschrieben. Wir untersuchen zunächst die Funktionen

$$(79) \quad f_k(\alpha) = \int_0^{\infty} t^k J_0(t) e^{-\alpha t} dt.$$

Nach Gleichung (78) ist dann für $n \geq 1$:

$$(80) \quad s_n^0 = 2n f_{2n-1}(0).$$

Aus Gl. (79) folgt

$$(81) \quad f_k(\alpha) = (-1)^k \frac{d^k f_0(\alpha)}{d\alpha^k}.$$

Für $f_0(\alpha)$ erhält man nach Einsetzung der Integraldarstellung für die Besselfunktion J_0 (Sommerfeldsches Integral) den Ausdruck

$$(81') \quad f_0(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

Die Reihenentwicklung dieser Funktion nach α hat nur gerade Potenzen. Es ist also $f_{2n-1}(0)$ und damit auch nach Gl. (80)

$$(82) \quad s_n^0 = 0 \quad \text{für } n \geq 1,$$

w. z. b. w.

Die letzten Betrachtungen geben Antwort auf eine Frage, die Stueckelberg²⁾ aufgeworfen hat. Unsere frühere Diskussion war unvollständig, weil nicht jede Funktion $f(\sigma)$, — wie wir oben gesehen haben, — mit dem Kausalitätsprinzip verträglich ist. Die beiden alternativen Kriterien, die Stueckelberg zur Beurteilung dieser Verträglichkeit heranzieht — Energiedichte oder wenigstens Gesamtenergie wesentlich positiv — scheinen uns jedoch zu eng, weil sie

1) Randbedingungen im Unendlichen gemäß Anm. S. 580.

2) E. C. G. Stueckelberg, *Helv. Phys. Acta* 14. S. 51. 1941.

Forderungen darstellen, die auch solche Lösungen der Wellengleichungen betreffen, denen keine physikalische Realität zukommt. Erstens werden nur retardierte Lösungen der Wellengleichungen zugelassen. Zweitens erlauben diese, — um bei unserm früheren Beispiel zu bleiben —, keine willkürliche Überlagerung der Maxwell'schen und Proca-Yukawaschen Feldkomponente, da sie von einer einzigen Teilchensorte und nicht etwa von unabhängigen Sorten herrühren, von denen eine für den Maxwell'schen, die andere für den Proca-Yukawaschen Feldanteil verantwortlich wäre. An die Stelle der Stueckelberg'schen Kriterien tritt unsere Ungleichung (66). Das Ergebnis der Diskussion lautet: Nicht jeder Ansatz $f(\sigma)$ ist mit dem Kausalitätsprinzip verträglich. Unser spezieller Ansatz, der Maxwell'sche und Proca-Yukawasche Felder kombiniert, macht jedoch keine Schwierigkeit¹⁾.

Das im letzten Beispiel eingeführte Verfahren kann man benutzen, um die zu beliebig vorgegebenen Trägheits- und Strahlungsfaktoren

$$(83) \quad m_n = \int_0^\infty t^{2n} f(-t^2) dt = k_{2n}, \quad s_n = \int_0^\infty t^{2n+1} f(-t^2) dt = k_{2n+1}$$

gehörige Grundfunktion $f(\sigma)$ zu bestimmen. Zu diesem Zweck bilden wir die erzeugende Funktion

$$(84) \quad k(\alpha) = \sum \frac{(-1)^n}{n!} k_n \alpha^n$$

und lösen die Integralgleichung

$$(85) \quad \int_0^\infty g(t) e^{-\alpha t} dt = k(\alpha).$$

Es ist dann k_n durch die Gleichung

$$(86) \quad k_n = (-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} \int_0^\infty g(t) e^{-\alpha t} dt \Big|_{\alpha=0} = \int_0^\infty t^n g(t) dt$$

gegeben, und die gesuchte Funktion lautet:

$$(87) \quad f(\sigma) = g(\sqrt{-\sigma}).$$

Der Zusammenhang zwischen den Funktionen $f(\sigma)$ und $k(\alpha)$ wird also wesentlich durch eine Laplacetransformation vermittelt. In der üblichen Symbolik des Operatorenkalküls ist

$$(88) \quad \mathcal{L}_\alpha g(t) = \alpha k(\alpha).$$

1) Allerdings könnte die am Schluß von § 6 aufgeworfene Massenfrage noch eine Einschränkung dieser Behauptung bringen.

Diese Darstellung führt sofort zu einer bemerkenswerten Folge. Setzen wir etwa als erzeugende Funktion

$$(89) \quad k(\alpha) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{1}{\alpha}},$$

so verschwinden bekanntlich sämtliche Entwicklungskoeffizienten an der Stelle $\alpha = 0$. Es ist also

$$(90) \quad k_n = 0.$$

Aber die Funktion $g(t)$ und $f(\sigma)$ verschwinden keineswegs. Es ist

$$(91) \quad g(t) = J_0(2\sqrt{t}), \quad f(\sigma) = J_0(2\sqrt{-\sigma}).$$

Wenn wir die Funktion (91) oder eine ähnliche zu einer beliebigen Funktion $f(\sigma)$ addieren, für die die Bedingung (2) gilt, ändert sich an den Bewegungsgleichungen nichts. Die Feldgleichungen sind also durch die Eigenkraft noch nicht vollständig bestimmt.

§ 5. Die Nebenbewegung

Die beiden ersten Glieder in der Entwicklung der Eigenkraft nach der Retardierung sind durch die Erfahrung hinreichend gesichert. Das zweite Glied — die gewöhnliche Strahlungskraft — ist für geladene Teilchen sogar weitgehend von möglichen Variationen der Theorie unabhängig. Über die Gestalt der weiteren Entwicklungsglieder wissen wir nichts. Wenn man annimmt, daß diese Entwicklung in Strenge bereits nach dem zweiten Glied abbricht — wir kommen auf diesen Fall gleich noch zurück — so ergeben sich, wie Wessel und Dirac (a. a. O. S. 573 und 574, Anm. 1) gezeigt haben, neben den geläufigen sehr überraschende und zunächst wenig glaubhafte Bewegungstypen. Im folgenden soll untersucht werden, ob das Paradoxe dieser Ergebnisse bei passender Wahl der höheren Entwicklungsglieder gemildert werden kann.

Das gemeinsame Merkmal aller möglichen Bewegungsgleichungen ist das Auftreten höherer Beschleunigungen. Bereits die gewöhnliche Strahlungskraft enthält dritte Zeitableitungen, und je weiter wir in der Entwicklung nach der Retardierung vorgehen, um so höhere Zeitableitungen treten auf. Dies führt dazu, daß die Bahnkurve eines Teilchens nicht mehr eindeutig durch Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit bestimmt ist. Die Bahn zwischen zwei Punkten ist darum auch im kräftefreien Fall im allgemeinen nicht mehr geradlinig. Vielmehr überlagert sich der Normalbewegung eine Nebenbewegung, deren Mannigfaltigkeit mit der Zahl der nicht verschwindenden Entwicklungsglieder zunimmt.

Zunächst betrachten wir den einfachsten Fall, in dem die Entwicklung bereits nach dem zweiten Glied abbricht. Die erzeugende Funktion lautet dafür

$$(92) \quad k(\alpha) = \frac{mc^2}{e_0^2} - \frac{1}{2} \alpha,$$

und für $f(\sigma)$ erhalten wir nach Gl. (88) den singulären Ausdruck

$$(93) \quad f(\sigma) = \frac{mc^2}{e_0^2} \delta(\sqrt{-\sigma}) - \frac{1}{2} \delta'(\sqrt{-\sigma}).$$

Die Art der Modifikation des Maxwell'schen Feldes ist sehr bemerkenswert. Für das statische Potential der ruhenden Punktladung erhält man nach Gl. (11)

$$\varphi(r) = \frac{2e_0}{c} \int_0^\infty \left(\frac{mc^2}{e_0^2} \delta(t) - \frac{1}{2} \delta'(t) \right) \frac{t dt}{\sqrt{r^2 + \frac{c^2}{e_0^2}}}$$

oder

$$(94) \quad \varphi(r) = \begin{cases} e_0/r & \text{für } r \neq 0, \\ \frac{2mc^2}{e_0} & \text{für } r = 0. \end{cases}$$

Außerhalb der Singularität stimmt das Potential mit dem Coulombschen überein, in ihr nimmt es aber einen endlichen Wert an. Damit ist im Einklang, daß aus Gl. (38) der Wellengleichungsoperator (42) der Maxwell'schen Theorie folgt.

Alle Modifikationen spielen sich also in der Singularität ab. Unser Ansatz stimmt darum weitgehend mit den Annahmen Diracs überein, der an der Gültigkeit des Maxwell'schen Feldes festhält und die Endlichkeit der Masse durch eine geeignete Beteiligung der Singularität am Energieumsatz, also durch eine negative „innere“ Energie des Teilchens erzwingt. Unser Ansatz geht nur insofern über den Diracschen hinaus, als die innere Energie ebenfalls Feldenergie sein soll.

Gl. (93) führt zu den geläufigen Ausdrücken für Trägheits- und Strahlungskraft. Das charakteristische Merkmal dieses Ansatzes ist eine exponentiell anklingende, also instabile Nebenbewegung, die bewirkt, daß das Teilchen sich selbst fast plötzlich auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigen kann. Die damit verbundene Erhöhung der Energie des äußeren Feldes geht nicht auf Kosten äußerer Arbeit, sondern auf Kosten der inneren Energie. Während in früheren Untersuchungen diese unglaubliche Nebenbewegung im allgemeinen stillschweigend übergangen wird, vielleicht unter der als selbstverständlich erachteten Annahme, daß nur die Lösungen sinnvoll seien, die bei verschwindender Strahlungskraft stetig in die normalen

Lösungen übergehen, haben Wessel und Dirac versucht, die Freiheitsgrade der Nebenbewegung ernst zu nehmen. Dirac will dabei die instabile Lösung durch die finale Nebenbedingung beseitigen, daß sich die Teilchen, wenn sie erst alle Wechselwirkungen mit der Umwelt hinter sich gelassen haben, geradlinig gleichförmig bewegen sollen.

Diese Forderung beseitigt aber keineswegs alle Paradoxien. Um das deutlich hervortreten zu lassen, betrachten wir ein gegen eine Potentialschwelle anlaufendes Elektron. Wir beschränken uns dabei auf die nichtrelativistische Näherung und nehmen ferner an, daß die Höhe der Potentialschwelle klein gegen die kinetische Energie des ankommenden Teilchens sei. Die Lösungsansätze für die Bewegung vor ($x \leq 0, t \leq 0$) und hinter der Schwelle ($x \geq 0, t \geq 0$) lauten beziehungsweise (mit $\alpha = \frac{3mc^3}{2e_0^2}$)

$$(95) \quad \begin{cases} x = v_0 t + \frac{1}{\alpha} (v - v_0) (e^{\alpha t} - 1) & \text{für } t \leq 0, \\ x = \left(v_0 - \frac{V_0}{m v}\right) t + \frac{1}{\alpha} \left(v - v + \frac{V_0}{m v}\right) \cdot (e^{\alpha t} - 1) & \text{für } t > 0, \end{cases}$$

wenn Ort und Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$ stetig verlaufen und wenn man für den Sprung der Beschleunigung auf Grund der Bewegungsgleichung

$$(96) \quad m \ddot{x} - \frac{2}{3} \frac{e_0^2}{c^3} \dot{x} = - \frac{dV}{dx},$$

die durch Integration über die Schwelle folgende Bedingung

$$(97) \quad \ddot{x}_+ - \ddot{x}_- = \frac{\alpha V_0}{m c}$$

ansetzt. Der Faktor v_0 bedeutet die Anfangsgeschwindigkeit, v die Geschwindigkeit an der Schwelle.

Nunmehr können zwei Fälle eintreten. Entweder ist der Koeffizient des Exponentialfaktors hinter der Schwelle kleiner als Null oder nicht. Im letzten Fall läuft das Elektron nach rechts davon. Man muß also Diracs finale Bedingung berücksichtigen und den Koeffizienten Null setzen. Das führt zu folgender Bedingung für die Geschwindigkeit v an der Schwelle, die zugleich die Geschwindigkeit darstellt, mit der das Teilchen weiterfliegt:

$$(98) \quad v - v_0 + \frac{V_0}{m v} = 0.$$

Sie führt zu den beiden Lösungen

$$(99) \quad v = \frac{v_0}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 V_0}{m v_0^2}} \right),$$

die bei geringer Schwellenhöhe näherungsweise folgendermaßen lauten:

$$(99') \quad v_1 \approx v_0 - \frac{V_0}{m v_0}, \quad v_2 \approx \frac{V_0}{m v_0}.$$

Wenn der Koeffizient des Exponentialfaktors kleiner als Null ist, kehrt die Bahn hinter der Schwelle zu dieser zurück. Das Teilchen läuft nicht weg, so daß kein Grund mehr zur Annahme der finalen Bedingung besteht. Es wird vielmehr in das Gebiet vor der Schwelle zurückgeworfen und beschreibt dabei

eine Bahn, die ebenfalls von dem vorhin genannten Typ ist. Dies gibt zu weiteren Lösungen des Problems Anlaß, vielleicht sogar zu solchen, die mehrmals um die Schwelle herumtanzen, ehe sie in der einen oder andern Richtung auslaufen.

Diese Einzelheiten des Ergebnisses brauchen wir nicht weiter zu verfolgen. Wir bemerken nur, daß die finale Bedingung keineswegs zu einem eindeutigen Ergebnis zu führen braucht. Von den beiden Lösungen der Gl. (99) und (99') zeigt nur die erste etwa das klassisch zu erwartende Verhalten. Die kinetische Energie hinter der Schwelle ist gleich der ursprünglichen Energie vermindert um die potentielle Energie der Schwelle und um den Strahlungsverlust an der Schwelle, für den man in erster Näherung

$$(100) \quad S = \frac{V_s^2}{2m v_0^2}$$

erhält. Die zweite Lösung (99) ist dadurch gekennzeichnet, daß fast der ganze Überschuß der primären Energie über die der Schwelle in Strahlung umgesetzt wird. Hinter der Schwelle kriecht das Teilchen mit um so geringer Geschwindigkeit, je höher die Primärenergie ist. Wenn die kinetische Energie unterhalb der doppelten Schwellenergie bleibt, ist in beiden Fällen der Strahlungsverlust so groß, daß das Teilchen nicht mehr hinter die Schwelle gelangen kann.

Ein charakteristisches Merkmal der Lösung vor der Schwelle muß man in dem nichtverschwindenden Exponentialglied sehen. Es bedeutet, daß das Teilchen etwas von der Schwelle merkt, ehe es diese erreicht. Dirac hat versucht, derartige Erscheinungen durch die Bemerkung verständlich zu machen, daß sich Wirkungen im Elektron mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten sollten. Diese Auffassung ist aber nach unserm Ansatz unmöglich. Nach Gl. (7) sind nur Bahnelemente im Nachkegel wirksam. Das merkwürdige Verhalten des Elektrons kann darum nur Folge der finalen Bedingung sein. In der Tat scheint es bei einem Teilchen, welches sich von vornherein darauf einstellen muß, daß es nach seiner Wechselwirkung mit der Umwelt vernünftig in die Unendlichkeit eingeht, nicht wunderbar, daß es im voraus seine Annäherung an die Potentialschwelle spürt. Dieser Fall zeigt deutlich, in welcher schwierigen Lage wir kommen, wenn wir fordern, daß die Eigenkraft des Elektrons bereits vollständig durch die gewöhnliche Trägheits- und Strahlungskraft beschrieben wird. Entweder müssen wir wie Dirac in unsere Betrachtung finale Gesichtspunkte einführen, oder wir haben die Möglichkeit zuzulassen, daß das kräftefreie Teilchen irgendwann einmal seine Geschwindigkeit nahezu sprunghaft ändert, um mit Lichtgeschwindigkeit weiterzufiegen. Dies wäre ein Ereignis, welches zwar mit dem Energiesatz verträglich wäre — denn die Zunahme der äußeren Feldenergie geht auf Kosten der inneren — wogegen sich aber unser am Entropiebegriff geschultes physikalisches Empfinden sträubt. Vielleicht bringt die Zuflucht zur Statistik die Lösung der

Schwierigkeit. Zunächst wollen wir aber prüfen, ob diese Paradoxie nicht wegfällt bei geeigneter Wahl höherer Entwicklungsglieder der Kraft nach der Retardierung.

Um die Nebenbewegung bei beliebiger Wahl der Grundfunktion $f(\sigma)$ untersuchen zu können, machen wir zwei vereinfachende Annahmen. Erstens beschränken wir uns auf die Betrachtung infinitesimaler Nebenbewegungen, um lineare Gleichungen zu erhalten. Zweitens wollen wir zunächst nur die Nebenbewegung des kräftefreien Teilchens behandeln. Nach Gl. (56) ist sicher die geradlinige, gleichförmige Bewegung eine Lösung des Problems. Wir fragen: Gibt es neben dieser noch weitere infinitesimal benachbarte? Wegen der Lorentz-invarianz können wir als Vergleichslösung ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Weltlinie des ruhenden Elektrons $\tau_0 = 0$ annehmen. Die Variation der Bahnkurve laute $\delta \tau_0$. Sie stellt eine Nebenbewegung dar, wenn auch sie die Bewegungsgleichung (56) erfüllt, wenn also die Gleichung

$$(101) \quad \int_0^{\infty} (\tau \delta v' - \delta \tau_0 + \delta \tau_0') f'(-\tau) d\tau = 0$$

gilt. Für diese lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten stellt der Ansatz

$$(102) \quad \delta \tau_0 = A e^{\alpha \tau}$$

eine Lösung dar, wenn der Exponentenfaktor α eine Wurzel der Gleichung

$$\int_0^{\infty} (\alpha \tau e^{-\alpha \tau} - 1 + e^{-\alpha \tau}) f'(-\tau) d\tau = 0$$

ist, die wir nach den Gl. (85) und (87) auch in der Form

$$(103) \quad \alpha^2 N(\alpha) = \alpha^2 k(\alpha) - \int_0^{\infty} \alpha k(\alpha) d\alpha = 0$$

schreiben können. Die Nebenbewegung ist also durch die Nullstellen des Ausdrucks $\alpha^2 N(\alpha)$ gekennzeichnet. Die Doppelwurzel $\alpha = 0$ führt zu benachbarten gleichförmigen geradlinigen Bewegungen, so daß die eigentliche Nebenbewegung durch die Nullstellen der Funktion $N(\alpha)$ gegeben ist.

Unser Beispiel in Gl. (92) führt zu

$$(104) \quad N(\alpha) = \frac{m c^2}{2 e_0} - \frac{1}{3} \alpha,$$

also zu der positiven Nullstelle $\alpha = \frac{3 m c^2}{2 e_0}$, die zu der schwer ver-

ständlichen, exponentiell anklingenden Nebenbewegung Anlaß gibt. Das Beispiel in Gl. (76) liefert die erzeugende Funktion

$$k(\alpha) = \frac{1}{2}(\sqrt{\gamma^2 + \alpha^2} - \alpha)$$

aus der

$$(105) \quad N(\alpha) = \frac{1}{6}(2\alpha^3 - \gamma^3) \frac{\sqrt{\gamma^2 + \alpha^2} - \gamma}{\alpha^2} - \frac{1}{3}(\alpha - \gamma)$$

folgt. Dieser Ausdruck hat keine Nullstelle. Unser früher angegebener Ansatz zeigt also im kräftefreien Fall keine Nebenbewegung. Nach passender Umordnung erhält man nämlich aus Gl. (105) durch Quadrierung

$$3\alpha^2\gamma^4 = 4\alpha^3\gamma^3.$$

Zwar hat diese letzte Gleichung die Doppelwurzel $\alpha = 0$ und die einfache Wurzel $\alpha = \frac{3}{4}\gamma$. Aber beide ergeben sich erst durch die Umformung (Multiplikation mit α^2 und Quadrierung) und sind nicht in Gl. (105) enthalten. Die Beschränkung auf das angegebene Riemannsche Blatt für $N(\alpha)$ ist wesentlich, wie man leicht sieht, wenn man rückwärts von $N(\alpha)$ zu $g(t)$ übergeht, weil $g(t) = 0$ sein soll für $t \leq 0$.

Um den allgemeinen Ausdruck für $N(\alpha)$ bei einer im kräftefreien Fall verschwindenden Nebenbewegung zu diskutieren, führen wir statt α und $N(\alpha)$ die transformierten Größen

$$(106) \quad x = \frac{2e_0^3}{3mc^3}\alpha, \quad M(x) = \frac{2e_0^3}{mc^3}N(\alpha)$$

ein. Bezeichnen wir ferner mit $G_1(x)$, $G_2(x)$ usw. im endlichen nicht singuläre, gerade Funktionen von x mit $G(0) = 1$, so muß $M(x)$ folgender Bedingung genügen:

$$(107) \quad M(x) = \frac{G_1(x)}{G_2(x)} - x = \frac{1}{G_2(x) + xG_3(x)}.$$

Der ungerade Funktionsanteil auf der linken Seite stellt die Gültigkeit der Ausstrahlungsbedingung (86) sicher¹⁾. Die ersten beiden Entwicklungsglieder $M(x) = 1 - x \dots$ sorgen dafür, daß sich in den beiden ersten Näherungen die gewöhnlichen Ausdrücke für Trägheitskraft und Strahlungskraft einstellen. Die rechte Seite formuliert unsere Forderung, daß die Nebenbewegung verschwinden, $M(x)$ also keine Nullstelle haben soll. Nach Multiplikation mit den Nennern und Gleichsetzung der ungeraden und geraden Gleichungsstelle erhält man

$$G_1G_4 = G_2G_3, \quad G_1G_5 - x^2G_2G_4 = G_3.$$

1) Diese Bedingung ist hinreichend, aber nicht notwendig.

Nun darf man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß G_1 und G_2 keine gemeinsame Wurzel, d. h. keinen gemeinsamen Teiler haben. Aus der ersten Gleichung folgt darum

$$G_3 = G_2 G_1, \quad G_4 = G_2 G_2,$$

und die zweite liefert

$$G_5 (G_1^2 - x^2 G_2^2) = G_2.$$

Daraus folgt in trivialer Weise: G_2 ist durch G_5 teilbar. Da die Klammer offensichtlich keinen gemeinsamen Teiler mit G_2 hat, ist aber auch umgekehrt G_2 vollständig in G_5 enthalten, so daß bis auf eine ganze Funktion, (die wir uns in eine der beiden G -Funktionen aufgenommen denken können), $G_2 = G_5$ ist. Für G_1 erhält man also den Ausdruck $G_1 = \sqrt{1 + x^2 G_2^2}$, woraus schließlich folgt, wenn wir für G_2 einfach G schreiben:

$$(108) \quad M(x) = \frac{1}{G(x)} \sqrt{1 + x^2 G^2(x)} - x = \frac{1}{G(x) (x G(x) + \sqrt{1 + x^2 G^2(x)})}.$$

Darin ist $G(x)$ eine willkürliche gerade, im endlichen nicht singuläre, im Nullpunkt einwertige Funktion.

Im einfachsten Fall für $G = 1$ lautet die Nullstellenfunktion

$$(109) \quad M(x) = \sqrt{1 + x^2} - x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2} + x}.$$

Der Ansatz $G = \frac{\sin x}{x}$ führt zu dem wurzelfreien Ausdruck

$$(110) \quad M(x) = \frac{2x}{e^{2x} - 1},$$

aus dem wir die Wahl von G weiter einschränkende Bedingungen kennenlernen werden. Unser früheres Beispiel ist offensichtlich mit Gl. (109) verwandt, aber nicht ganz so einfach. Aus Gl. (105) folgt:

$$(111) \quad M(x) = \sqrt{x^2 + \frac{16}{9}} - x - \frac{8}{9} \frac{\sqrt{x^2 + \frac{16}{9}} - \frac{4}{3}}{x^2},$$

was einem Ansatz

$$G(x) = \frac{9}{8} \sqrt{\frac{x^2 - \frac{32}{27} + \left(x^2 - \frac{8}{9}\right) \sqrt{x^2 + \frac{16}{9}}}{3(x^2 - 1)}}$$

entspricht.

§ 6. Der Einfluß äußerer Kräfte

Mit der Untersuchung der kräftefreien Nebenbewegung ist die Frage nach der Bedeutung der neuen Freiheitsgrade keineswegs erschöpft. Die Forderung, daß im kräftefreien Fall keine Nebenbewegung möglich sein soll, bedeutet keine Beseitigung der neuen

Freiheitsgrade, sondern nur ihre Verdeckung durch hochgradige Entartung. Äußere Kräfte können die Entartung aufheben und die Freiheitsgrade sichtbar machen.

Um dies zu zeigen, betrachten wir zunächst den linearen, harmonischen Oszillator nach dem Ansatz in Gl. (110). Die Bewegungsgleichung lautet nach Gl. (56) in nichtrelativistischer Näherung

$$(112) \quad K = \frac{4e_0^2}{c^4} \int_0^\infty (\tau v' - x_0 + x_0) f'(-\tau^2) d\tau = \frac{\partial V}{\partial x} = f x_0.$$

Mit dem Lösungsansatz $x_0 = X_0 e^{i\omega t}$ erhält man daraus mit Rücksicht auf die Gl. (103) und (106) die Bedingungsgleichung

$$(113) \quad x^3 M(x) = -x_0^3 \quad \text{mit} \quad x_0 = \frac{2e_0^2}{3mc^4} \sqrt{\frac{f}{m}},$$

deren Wurzeln die Bewegung des linearen harmonischen Oszillators kennzeichnen. In dem Sonderfall (110) lautet diese

$$\frac{2x^3}{e^{2x} - 1} = -x_0^3.$$

Für kleine x_0 (der Frequenz $\omega = \sqrt{\frac{f}{m}} = 10^{15} \text{ sec}^{-1}$ entspricht $x_0 = \frac{2}{3} \frac{r_0 \omega}{c} \approx 10^{-8}$) muß entweder der Zähler klein sein oder der Nenner groß. Im ersten Fall erhält man $x = \pm ix_0$, also die klassischen Oszillatorlösungen. Der zweite Fall kann nur dann eintreten, wenn es eine Wurzel der obigen Gleichung gibt mit großem, positivem Realteil, die bei verschwindendem x_0 unendlich wird. Solche Wurzeln gibt es um so mehr, je kleiner x_0 ist. Setzen wir $x = \xi + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi i$, so ist dies im Grenzfall $\xi \gg \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ eine Näherungslösung für kleine x_0 , wenn ξ eine reelle Wurzel der Gleichung $e^{2\xi} = \frac{2\xi^3}{x_0^3}$ ist, die im Limes $x_0 \rightarrow 0$ unendlich wird. Diese Lösung existiert. Denn bei hinreichend kleinen Werten von x_0 schneidet die Kurve $\eta = x_0^3 e^{2\xi}$ sicher die kubische Parabel $\eta = 2\xi^3$ in einem dem Ursprung benachbarten Punkt. Da die Exponentialfunktion schließlich stärker wächst als alle endlichen Potenzen, müssen sich die beiden Kurven noch in einem weiteren Punkt schneiden, der mit abnehmendem x_0 beliebig weit draußen liegt. Dieser liefert die Wurzeln mit dem großen positiven Realteil und führt zu einer extrem instabilen Komponente der Nebenbewegung. Das zuletzt untersuchte Beispiel beseitigt also die Nebenbewegung nur im kräftefreien Fall.

Für unser einfachstes Beispiel in Gl. (109) liegen die Dinge ganz anders. Hier nimmt die Gl. (113) für die Oszillatornebenbewegung folgende Form an:

$$x^3 \sqrt{1+x^2} - x^3 = -x_0^2,$$

woraus durch Umordnung und Quadrierung die Gleichung vierten Grades

$$(114) \quad x^4 + 2x_0^2 x^2 = x_0^4$$

folgt. Von den vier Wurzeln dieser Gleichung liegen zwei auf dem falschen Riemannschen Blatt. (Sie sind also Wurzeln der Gleichung $-x^3 \sqrt{1+x^2} - x^3 = -x_0^2$ und nicht solche unserer Ausgangsgleichung). Der Oszillator hat darum im vorliegenden Beispiel wie im klassischen Fall nur zwei Freiheitsgrade. Der Realteil der beiden zulässigen Wurzeln ist stets negativ, so daß die Schwingung notwendig gedämpft ist. Um das zu zeigen, setzen wir in Gl. (114) $x = \xi + i\eta$. Die Zerlegung in Real- und Imaginärteil führt zu folgenden Bestimmungsgleichungen für ξ und η :

$$(115) \quad \begin{cases} \xi^4 - 6\xi^2\eta^2 + \eta^4 + 2x_0^2(\xi^2 - 3\eta^2) = x_0^4, \\ 2\eta(2\xi(\xi^2 - \eta^2) + x_0^2(3\xi^2 - \eta^2)) = 0. \end{cases}$$

Offensichtlich liefern $\eta = 0$ und die reellen Wurzeln von

$$\xi^4 + 2x_0^2\xi^2 = x_0^4$$

zwei Lösungen der Gl. (114) und zwar gerade die beiden auszuschließenden. Wenn $\eta \neq 0$ ist (und wenn wir $\xi = \zeta x_0^2$ setzen), erhält man aus der zweiten Gl. (115)

$$(116) \quad \eta^2 = \frac{2\zeta + 3}{2\zeta + 1} \zeta^2 x_0^4,$$

und die erste ergibt nach Einsetzung dieses Ausdrucks

$$(117) \quad \frac{\zeta^3(1+\zeta^2)}{(2\zeta+1)^2} = -\frac{1}{16x_0^4}.$$

Die reellen Wurzeln dieser Gleichung liegen im Intervall $-1 \leq \zeta \leq 0$. ζ ist also negativ, die Oszillation stets gedämpft. Aber nur die Lösungen im Intervall $-\frac{1}{2} \leq \zeta \leq 0$ führen zu reellen Werten von η . In diesem Intervall hat aber Gl. (117) nur eine Lösung, wie man leicht aus ihrer graphischen Darstellung ersieht. Für kleine x_0 gilt

$$(118a) \quad \zeta \approx -\frac{1}{2} + \frac{x_0^2}{4}, \quad x = -\frac{1}{2} x_0^2 \pm i x_0,$$

für große Werte erhält man statt dessen:

$$(118b) \quad \zeta \approx -\left(\frac{1}{2x_0}\right)^{2/3}, \quad x = -(1 \pm i\sqrt{3})\left(\frac{x_0}{4}\right)^{1/3}.$$

Es gibt also Beispiele, die auch unter dem Einfluß von äußeren Kräften keine Nebenbewegung zeigen. Offenbar dürfen wir im Sinne unserer früheren Forderung in Gl. (108) nur solche Funktionen $G(x)$ zulassen, die das leisten. Ansatz (109) ist dafür das einfachste Beispiel. Aber auch unser früherer Ansatz genügt dieser schärferen Bedingung. Aus den Gl. (111) und (113) folgt

$$(119) \quad \left(x^2 - \frac{8}{9}\right) \sqrt{x^2 + \frac{16}{9}} - x^3 = -\frac{32}{27} - x_0^2.$$

Umordnung und Quadrierung liefert, wenn wir

$$(120) \quad x = \frac{\zeta}{1 + \frac{27}{32} x_0^2}$$

setzen, die kubische Gleichung

$$(121) \quad \zeta^3 - \zeta^2 = x_0^2 \left(1 + \frac{27}{64} x_0^2\right) \left(1 + \frac{27}{32} x_0^2\right)^2.$$

Die reelle Wurzel dieser Gleichung erfüllt, wie man leicht erkennt, sicher nicht zugleich Gl. (119), liegt also auf einem andern Blatt. Die komplexen Wurzeln haben negativen Realteil. Setzen wir $x = \xi + i\eta$, so folgt für $\eta \neq 0$ ähnlich wie im vorhergehenden Beispiel

$$\eta^2 = 3\xi^2 - 2\xi, \quad \xi \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{8} x_0^2 \left(1 + \frac{27}{64} x_0^2\right) \left(1 + \frac{27}{32} x_0^2\right)^2,$$

woraus sich die Behauptung $\xi < 0$ sofort ergibt.

Neben dem linearen Oszillator kann man noch die Bewegung eines in ein homogenes Feld eintretenden Elektrons in Strenge behandeln. Als typisches Beispiel betrachten wir ein Elektron in einem homogenen, longitudinalen elektrischen Feld. Wählen wir den Zeitnullpunkt so, daß das Elektron zur Zeit $t = 0$ in das Feld eintritt, so lautet die Bewegungsgleichung

$$(122) \quad \frac{4e_0^2}{c^3} \int_0^\infty (\tau v' - x_0 + x_0') f'(-\tau^2) d\tau = -e_0 E_0 \mathcal{G}(t),$$

wenn wir mit E_0 die elektrische Feldstärke und mit

$$\mathcal{G}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{„ } t < 0 \end{cases}$$

die Dirichletsche Sprungfunktion bezeichnen. Ihre Auflösung erfolgt durch Fourierzerlegung. Mit den Integralen

$$(123) \quad x_0(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \xi(\alpha) e^{\alpha t} d\alpha, \quad \mathcal{G}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} d\alpha,$$

die über die imaginäre Achse der α -Ebene laufen (unter positiver Umgehung der Singularitäten), folgt aus obiger Gleichung nach (108),

$$\alpha^3 N(\alpha) \xi(\alpha) = \frac{c^2}{2\epsilon_0} E_0 \cdot \frac{1}{\alpha}$$

oder

$$(124) \quad \xi(\alpha) = \frac{c^2 E_0}{2\epsilon_0} \frac{1}{\alpha^3 N(\alpha)} + 2\pi i (a \delta(\alpha) - b \delta'(\alpha)).$$

Die beiden letzten Glieder entsprechen der Doppelwurzel $\alpha = 0$ von $\alpha^3 N(\alpha)$ und sind Ausdruck der beiden Freiheitsgrade der Bewegung. Wenn $\alpha^3 N(\alpha)$ noch weitere Nullstellen hätte, würden dazu noch weitere der Nebenbewegung zugeordnete Glieder hinzukommen. Aus den Fourierkoeffizienten ergibt sich nach Gl. (123)

$$(125) \quad x_0(t) = a + bt + \frac{c^2 E_0}{4\pi i \epsilon_0} \int \frac{e^{i\alpha t} d\alpha}{\alpha^3 N(\alpha)}.$$

Dieses Integral läßt sich für unsere Beispiele in den Gl. (109) und (110) leicht ausrechnen. Der erste Fall, der uns besonders interessiert, führt zu einem bemerkenswerten Ergebnis. Die Geschwindigkeit springt an der Feldgrenze um einen endlichen Betrag. Das bedeutet, daß die Masse des Elektrons an der Sprungstelle verschwindet. Es braucht uns nicht zu wundern, daß so etwas möglich ist, weil wir die Abänderung der Feldgleichungen durch den Ansatz (108) so bestimmt haben, daß davon gerade die Trägheitskraft betroffen wird. Daß sich diese Abänderung in so unerwarteter Weise äußert, liegt an dem speziellen Ansatz (109). Der Ansatz (110) zeigt diese Schwierigkeit nicht. Dieses Ergebnis läßt erkennen, daß es neben der Forderung verschwindender Nebenbewegung noch andere naheliegende Bedingungen geben muß, die die Unbestimmtheit der zukünftigen Elektrodynamik einengen. Doch wollen wir deren Diskussion einer späteren Untersuchung vorbehalten.

§ 7. Ansatz zur Quantelung

Zum Schluß wollen wir den Ansatz dafür geben, wie man die vorliegende allgemeine lineare Feldtheorie quanteln kann. Die Schwierigkeit besteht darin, daß es im allgemeinen nicht möglich zu sein scheint, die Feldgleichungen in kanonischer Form zu schreiben. Trotzdem gelingt die Quantelung im Anschluß an das der Feldtheorie zugrunde liegende Hamiltonsche Prinzip.

Die von Pauli¹⁾ angegebenen Lorentzinvarianten Vertauschungsrelationen lassen sich mit dem Formalismus aus § 1 leicht übertragen. Sie lauten nach Pauli

$$(126) \quad [\varphi_\mu(x), \varphi_\nu(x')] = i\gamma D(x-x') \delta_{\mu\nu}.$$

1) W. Pauli, *Rev. Mod. Phys.* 13. S. 202. 1941.

Darin bedeutet $D(x)$ die Differenz der retardierten und avancierten Greenschen Funktion der jeweiligen Wellengleichung. Ist $f(\sigma)$ die in Gl. (2) angegebene Funktion, so lauten diese Greenschen Funktionen beziehungsweise

$$(127a) \quad f_R(x) = \begin{cases} f(\sigma) & \text{für } t < 0, \\ 0 & \text{„ } t > 0 \end{cases}$$

und

$$(127b) \quad f_A(x) = \begin{cases} f(\sigma) & \text{für } t > 0, \\ 0 & \text{„ } t < 0. \end{cases}$$

Die Disjunktion $t \neq 0$ ist Lorentzinvariant, weil $\dot{f}(\sigma)$ zwischen Vor- und Nachkegel verschwindet. Die Paulische D -Funktion heißt also:

$$(128) \quad D(x) = f_R(x) - f_A(x).$$

Die Feldgleichungen ergeben sich nun aus der Forderung, daß die Lagrangefunktion L in Operatorform mit allen Potentialen vertauschbar sein soll, daß also

$$(129) \quad [L, \varphi_\mu(x)] = 0$$

gelten muß. Die Lagrangefunktion lautet

$$(130) \quad \bar{L} = \frac{1}{16\pi ic} \int f_{\mu\nu}(x) \varepsilon(x-x') f_{\mu\nu}(x') dx dx' + \frac{1}{ic^2} \int s_\mu(x) \varphi_\mu(x) dx,$$

wie man im Anschluß an die Gleichungen (45) und (46) in § 3 leicht erkennt. Nach der Quantelung wird L als Funktional der Potentiale ein Operator. Die Viererstromdichte s_μ sei mit allen φ_μ vertauschbar. Aus den Gleichungen (129) und (130) folgt danach, weil die bei partiellen Integrationen auftretenden Oberflächenintegrale über die unendlichferne Kugel mit $D(x)$ verschwinden:

$$(131) \quad [L, \varphi_\mu] = -\frac{\gamma}{4\pi c} \int D(x-x') \left(\frac{\partial F_{\mu\nu}(x')}{\partial x_\nu} - \frac{4\pi}{c} s_\mu(x') \right) dx' = 0.$$

Es ist also

$$(132) \quad \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} s_\mu + C_\mu.$$

Darin bedeutet C_μ formal einen Viererstrom, dessen retardiertes Potential mit seinem avancierten übereinstimmt.

Man kann die C_μ nicht ohne weiteres Null setzen, weil sie mit den φ_μ nicht vertauschbar sind. Aus den Vertauschungsrelationen (126) folgt vielmehr

$$(133) \quad [C_\mu(x), \varphi_\nu(x')] = i\gamma \left(\varepsilon, \frac{\partial^2 D(x-x')}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right),$$

wenn man noch beachtet, daß $(\varepsilon, \square D) = 0$ ist. Da aber die Rotation von C_μ nach der letzten Gleichung mit dem Viererpotential vertauschbar ist, erscheint folgende Zerlegung des C -Vektors zweckmäßig:

$$(134) \quad C_\mu = \left(\varepsilon, \frac{\partial C}{\partial x_\mu} \right) + 4\pi s_\mu^0,$$

wobei die Nichtvertauschbarkeit allein in C steckt gemäß

$$(135) \quad [C(x), \varphi_\mu(x')] = i\gamma \frac{\partial D(x-x')}{\partial x_\mu}$$

Der Vierervektor s_μ^0 ist dann vom selben Charakter wie die Viererstromdichte. Man kann sich also s_μ^0 von vornherein in s_μ aufgenommen denken und darum ohne Beschränkung der Allgemeinheit Null setzen. Die Sonderstellung des Stroms s_μ^0 hängt wahrscheinlich damit zusammen, daß die strahlungsfreie Bewegung (retardiertes = avanciertes Potential) von der Quantelung des Feldes nicht berührt wird.

Das zwangsläufige Auftreten der Operatorgröße C beseitigt von selbst eine Schwierigkeit, die sonst in der Quantenelektrodynamik nur auf Umwegen zu überwinden ist. Gehen wir nämlich von Gl. (132) zur Wellengleichung über, so folgt

$$(\varepsilon, \square \varphi_\mu) = -\frac{4\pi}{c} s_\mu + \left(\varepsilon, \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\nu} - C \right) \right).$$

Wenn wir die Normierung des Potentials statt durch die gewöhnliche Bedingung $\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\nu} = 0$ durch die Gleichung

$$(136) \quad \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\nu} = -\frac{4\pi}{c} s_\mu$$

bestimmen, so erhalten wir die Wellengleichung in der üblichen Form:

$$(137) \quad (\varepsilon, \square \varphi_\mu) = C.$$

Da gerade die Differenz $\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\nu} - C$ eine C -Zahl ist (und nicht $\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\nu}$), ist der Ansatz in Gl. (135) im Gegensatz zum üblichen ohne Einschränkung möglich.

Damit ist gezeigt, daß in unserer allgemeinen Elektrodynamik die Ableitung der Quantenfeldgleichungen aus der Vertauschbarkeit der Lagrangefunktion nicht nur möglich ist, sondern daß sie der Eigenart dieser Gleichungen in hervorragendem Maße angepaßt erscheint, weil sie zwangsläufig der Nichtvertauschbarkeit von $\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\nu}$ mit φ_ν Rechnung trägt. Auf spezielle Folgerungen aus unserm Ansatz für die Quantenelektrodynamik wollen wir an dieser Stelle nicht eingehen.

Zusammenfassung

Wenn man neben der gewöhnlichen Trägheitskraft die Strahlungskraft und die höheren Retardierungseffekte berücksichtigt, treten in den Bewegungsgleichungen neben der Beschleunigung auch höhere Zeitableitungen der Ortskoordinaten auf. Dies bewirkt im allgemeinen eine Erhöhung der Zahl der kinetischen Freiheitsgrade, derart daß es zwischen zwei Punkten eine unter Umständen vieldimensionale Schar von Bahnkurven gibt, die sämtlich Lösungen der Bewegungsgleichungen sind.

In der vorliegenden Arbeit wird speziell die Frage behandelt (§§ 5, 6), unter welchen Bedingungen sich die Zahl der Freiheitsgrade reduziert. Es wird gezeigt, daß es Ansätze gibt, bei denen die Bahnkurve wie in der klassischen Mechanik bereits durch zwei Punkte vollständig bestimmt ist. Allein auf Grund rein theoretischer Betrachtungen können wir natürlich nicht behaupten, daß die Bahnkurven des Elektrons wirklich unserer Annahme verschwindender Nebenbewegung entsprechen. Vielleicht muß man der Schrödingerschen Zitterbewegung des Elektrons in der Diracschen Theorie des Spins korrespondenzmäßig eine passende Nebenbewegung zuordnen. In diesem Fall würde sich unsere Betrachtung der Wesselschen Auffassung nähern. Unabhängig von solchen Fragen, die nur das Experiment entscheiden kann, zeigt sich jedoch: Das Studium der Nebenbewegung führt zu einengenden Bedingungen für die notwendig werdende Verallgemeinerung der Maxwellschen Gleichungen und zwar auf Grund von Erfahrungen, die noch in zugänglichen Energiebereichen liegen. Unsere Annahme verschwindender Nebenbewegung entspricht vorbehaltlich der Diskussion der Zitterbewegung am ehesten unserem gegenwärtigen Wissen vom Elektron.

Beiläufig wurde gezeigt, daß das Studium der Strahlungskraft (§ 4) zu weiteren einschränkenden Bedingungen für die Feldgleichungen führt. Mit dem allgemeinen Schema der Feldgleichungen ist es verträglich, daß ein Teilchen bei (negativer) Ausstrahlung Energie gewinnt. Solche Möglichkeiten müssen, worauf Stueckelberg hingewiesen hat, ausgeschlossen werden. Zu ähnlichen Einschränkungen muß auch die Untersuchung der Trägheitskraft führen, wie in § 6 wahrscheinlich gemacht wurde. Doch sind diese nicht mehr explizit herausgearbeitet worden.

In den ersten Paragraphen (§§ 1—4) wurden die Grundlagen der allgemeinen Feldtheorie und der Elektromechanik entwickelt. Den Ausgangspunkt bildet eine Verallgemeinerung der Diracschen Darstellung des Maxwellschen Viererpotentials. Es wird gezeigt,

daß diese unsere frühere Theorie (die das Maxwellsche Feld mit dem Proca-Yukawaschen kombiniert) und eine eng an die Maxwellschen Gleichungen anschließende Theorie Diracs mitumfaßt. Unsere allgemeine lineare Theorie paßt in den Rahmen der Mie-Bornischen Elektrodynamik. Die Bewegung der singulär gedachten Partikel erfolgt so, daß die gesamte Lorentzkraft des eigenen und des äußeren Felds an den Orten der Singularitäten verschwindet.

Zum Schluß (§ 7) wurden die Grundlagen der allgemeinen Quantenelektrodynamik entwickelt.

Den Herren Professoren Fues und Heisenberg und Herrn Dr. Bagge danke ich herzlich für freundliche Diskussionen, Fräulein cand. phil. Dittus für ihre Hilfe bei der Untersuchung einiger Integrale.

Breslau, Institut für theoretische Physik der Universität, derzeit Berlin-Dahlem, Kaiser Wilhelm-Institut für Physik, am 10. Februar 1943.

(Eingegangen am 24. Februar 1943)

**Zur Berechnung der Kräfte
an zylindrischen Leitern in ebenen elektrostatischen
und elektromagnetischen Feldern**

Von Wilhelm Müller

(Mit 14 Abbildungen)

Im folgenden sollen einige allgemeine Sätze und Formeln für die Berechnung der Kraftwirkung auf ein System von zylindrischen Leitern in ebenen elektrostatischen oder magnetischen Feldern entwickelt werden unter Ausnutzung von gewissen besonders in der Hydrodynamik ausgebildeten funktionentheoretischen Methoden¹⁾. Dabei wird in Erweiterung einiger bekannter auf Blasius zurückgehender Integralansätze²⁾ insbesondere Gebrauch gemacht von einigen von M. Lagally³⁾ aus dem Impulssatz abgeleiteten Integralformeln, die hier zum ersten Male auf die elektromagnetische Feldtheorie übertragen und auf die Ermittlung des Einflusses einzelner Quell- und Wirbelelemente auf die Kraftwirkung angewendet werden. Unter den zahlreichen durchgerechneten Sonderfällen ist vor allem der Fall zweier in ein homogenes Feld gestellter kreiszylindrischer Leiter bemerkenswert, dessen strenge Behandlung am zweckmäßigsten mit Hilfe von elliptischen Funktionen und der daraus ableitbaren Reihenentwicklungen durchgeführt wird.

1. Der allgemeine Ansatz für die Berechnung der Kräfte

Wir nehmen an, daß im elektrostatischen Feld eine zylindrische Leiterfläche mit der Ebenenspur C (kurz ein Leiter C) und eine außerhalb gelegene unendlich lange Quellstrecke senkrecht zur Ebene mit dem Spurpunkt Q_1 (kurz ein Quellpunkt Q_1) gegeben sei⁴⁾. Den singulären Punkt Q_1 schließen wir durch einen kleinen Kreis C_1 ein, dessen Fläche mit S_1 bezeichnet sei und denken uns außerdem eine

1) H. Blasius, Ztschr. f. Math. u. Physik 58. S. 90. 1910.

2) R. M. Morris, Phil. Magaz. a. Journ. of Sc. Vol. 23. Ser. 7. S. 246, 757, 1082. 1937; W. Alexandrow, Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. 9. S. 335. 1929; W. G. Bickley, Phil. Trans. Ser. A. 229. S. 235. 1929.

3) M. Lagally, Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. 1921, S. 221; Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. 2. S. 409. 1922.

4) W. Müller, Math. Strömungslehre, Berlin 1928, S. 22 u. 50.

geschlossene Kurve F gezeichnet, die den Leiter und den Kreis C_k umschließt. Aus dem bekannten Ausdruck

$$(1) \quad U = \frac{1}{8\pi} \int E^2 d\sigma$$

für die Energie des durch die Feldstärke \mathcal{E} bestimmten elektrostatischen Feldes und der Dielektrizitätskonstanten $\epsilon = 1$, ergibt sich bekanntlich die Kraft pro Längeneinheit mit Hilfe der negativen Gradientenbildung in der Form

$$(2) \quad \mathfrak{K} = -\frac{1}{8\pi} \int \nabla E^2 d\sigma.$$

Für das über das reguläre Gebiet R zwischen den Kurven C , C_k und F erstreckte Integral erhalten wir nach Gauss, wenn wir konsequent die äußere Normale n der Randkurven einführen,

$$(3) \quad \frac{1}{8\pi} \int_R \nabla E^2 d\sigma = \frac{1}{8\pi} \left(\int_C E^2 n df - \int_{C_k} E^2 n df - \int_{C_k} E^2 n df \right).$$

Für das von dem Kreise C_k begrenzte Gebiet S_k haben wir die Vektorformel

$$(4) \quad \frac{1}{2} \nabla E^2 = \nabla \cdot \mathcal{E}\mathcal{E} - \mathcal{E} \nabla \cdot \mathcal{E} - \text{rot} \mathcal{E} \times \mathcal{E}$$

zu benutzen, wo $\nabla \cdot \mathcal{E}\mathcal{E}$ die Divergenz der Dyade $\mathcal{E}\mathcal{E}$ bedeutet. Wendet man dann auf das entsprechende Raumintegral wieder den Gauss'schen Satz an, so wird mit $\text{rot} \mathcal{E} = 0$

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \int_{S_k} \nabla E^2 d\sigma &= \frac{1}{8\pi} \int_{C_k} E^2 n df \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{C_k} \mathcal{E}\mathcal{E} \cdot n df - \frac{1}{4\pi} \int_{S_k} \mathcal{E} \nabla \cdot \mathcal{E} d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Für das erste Integral haben wir aber, da die Kraftlinien auch auf C_k senkrecht stehen

$$(6) \quad \int_{C_k} \mathcal{E}\mathcal{E} \cdot n df = \int_{C_k} E^2 n df.$$

Daher wird aus (5)

$$(5a) \quad \frac{1}{8\pi} \int_{C_k} E^2 n df = \frac{1}{4\pi} \int_{S_k} \mathcal{E} \text{div} \mathcal{E} d\sigma.$$

Nun läßt sich, wie wir zeigen werden, das Randintegral längs der Leiterkontur C als komplexes Integral einer in R regulären analytischen Funktion darstellen.

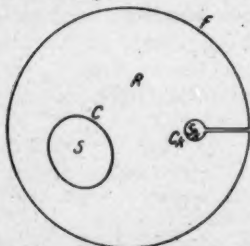


Abb. 1. Zur Theorie der Lagallyschen Integrale

Dann ergibt aber der Cauchysche Satz

$$(7) \quad \int_F E^2 n df - \int_C E^2 n df - \int_{C_0} E^2 n df = 0$$

also auch

$$\int_S \nabla E^2 d\sigma = 0.$$

Da schließlich der zweite Ausdruck auf der rechten Seite von (3) den Vektor der auf den Leiter wirkenden Kraft \mathfrak{R}_C darstellt, so erhalten wir die bemerkenswerte Formel

$$(8) \quad \mathfrak{R}_C = \frac{1}{8\pi} \oint_C E^2 n df = \frac{1}{8\pi} \int_F E^2 n df - \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E} d\sigma.$$

Ebenso gewinnen wir für das Moment der Kraft den Ausdruck

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{M}_C &= \frac{1}{8\pi} \oint_C (\mathfrak{r} \times \mathfrak{E}) \mathfrak{E} \cdot n df \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_F (\mathfrak{r} \times \mathfrak{E}) \mathfrak{E} \cdot n df - \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} (\mathfrak{r} \times \mathfrak{E}) \operatorname{div} \mathfrak{E} d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Um den Übergang zu komplexen Koordinaten durchzuführen, setzen wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= E_x e_1 + E_y e_2; & n &= \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2; \\ dx &= -ds \sin \varphi; & dy &= ds \cos \varphi. \end{aligned}$$

Dann wird

$$K_x e_1 + K_y e_2 = \frac{1}{8\pi} \oint_C [(E_x^2 + E_y^2) e_1 dy - (E_x^2 + E_y^2) e_2 dx]$$

oder mit Einführung der imaginären Einheit

$$K_y + i K_x = \frac{1}{8\pi} \oint_C [-(E_x^2 + E_y^2) dx + i(E_x^2 + E_y^2) dy].$$

Benutzt man die längs C gültige Bedingung

$$E_x dx + E_y dy = 0,$$

so ergibt sich durch einfache Rechnung

$$(10) \quad K_y + i K_x = \frac{1}{8\pi} \oint_C (E_x - i E_y)^2 (dx + i dy).$$

Führen wir weiter das komplexe Potential $\Omega(z) = \Phi + i\Psi$ ein, aus dem sich der an der reellen Achse gespiegelte Vektor der Feldstärke ableitet

$$\bar{E} = E_x - i E_y = -\frac{d\Omega}{dz},$$

so ergibt sich für den konjugiert komplexen Kraftvektor

$$(11) \quad \bar{K}_C = K_x - i K_y = -\frac{1}{8\pi} \oint_C \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz.$$

Diese Formel geht aus der bekannten Blasiuschen Formel der ebenen Hydrodynamik durch Multiplikation mit dem Faktor $-\frac{1}{4\pi\epsilon}$ hervor. Dabei ist zu bemerken, daß die Funktionen Φ und Ψ ihre Rollen insofern vertauschen, als die Kontur C zum System der Potentiallinien gehört und die Potentiallinien des hydrodynamischen Falles sich in die Kraftlinien des elektrostatischen Falles verwandeln.

Die Form des Integrals (11) kann übrigens auch, was wesentlich ist, auf das Integral längs der Berandung F übertragen werden. Die Formel (8) in Verbindung mit (5a) bringt dann zum Ausdruck, daß man gemäß Abb. 1 nach Anbringung eines Schnittes ss zwischen C_k und F den positiven Umlauf längs C ohne Passieren einer Singularität (Quelle) stetig überführen kann in einen geschlossenen Weg, der sich zusammensetzt aus dem positiven Umlauf längs F , einem negativen Umlauf längs C_k und zwei entgegengesetzten Wegen längs der beiden Ufer des Schnittes ss , deren zugehörige Integrale sich aufheben. Das erste Integral längs F kann nach funktionentheoretischen Methoden ausgewertet werden, wobei alle Singularitäten als innere Singularitäten zu behandeln sind, während das zweite Integral den Einfluß der äußeren Singularitäten auf die Kraftwirkung bestimmt.

Das Integral

$$\int_{S_k} \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E} d\sigma$$

kann nun im Anschluß an Lagally für eine Punktquelle in folgender Weise umgeformt werden. Wenn das Feld in der Nähe der Quelle durch das Potential

$$(12) \quad \Omega_k = -\frac{q}{2\pi} \ln(z - z_k)$$

dargestellt ist, und wenn wir die Ladung der Quelle auf der kleinen Kreisfläche S_k mit dem Radius a gleichmäßig verteilt denken, so wird an dieser Stelle

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{q}{\pi a^2}.$$

Zerlegt man die komplexe Feldstärke in zwei Teile

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_{0k} + \mathfrak{E}_k^*,$$

von denen der erste von der im Kreise vorhandenen Quelle, der zweite von dem übrigen Feld herrührt, so ergibt sich wegen der symmetrischen Verteilung um z_k

$$\int_{S_k} \mathfrak{E}_{0k} d\sigma = 0$$

also

$$(19) \quad \int_{S_k} \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E} d\sigma = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{q}{\pi a^2} \int_{S_k} \mathfrak{E}_k^* d\sigma = q \mathfrak{E}_k^*.$$

Damit erhält man schließlich bei Vorhandensein einer Anzahl Quellen von der Ergiebigkeit q_k in den Punkten z_k für die auf den Leiter wirkende Kraft folgenden Ausdruck

$$(14) \quad K = -\frac{i}{8\pi} \oint_0 \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz = -\frac{i}{8\pi} \oint_P \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz - \frac{1}{4\pi} \sum_k q_k E_k^*$$

der zur Berechnung unmittelbar geeignet ist.

Für das Moment ergibt sich zunächst aus dem Randintegral bei Benutzung der Randbedingung

$$M = -\frac{1}{8\pi} \int_0 (E_x^2 + E_y^2) (x dx + y dy) = \frac{1}{8\pi} \Re \oint_0 \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 z dz,$$

wenn \Re den Realteil des dahinter stehenden Randintegrals bedeutet. Ebenso erhält man wie in der Hydrodynamik für das Moment der von den Quellen herrührenden Kräften

$$- \Re \frac{i}{4\pi} \sum_k z_k q_k E_k^*.$$

Im ganzen wird daher, wenn wir die komplexe Größe $M + iN$ nennen

$$(15) \quad \begin{cases} M + iN = \frac{1}{8\pi} \oint_0 \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 z dz \\ \quad = \frac{1}{8\pi} \oint_P \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 z dz - \frac{i}{4\pi} \sum_k z_k q_k E_k^*. \end{cases}$$

Sind außer den einfachen Quellen noch Dipole in z_i vorhanden mit den gerichteten Dipolmomenten $m_i = (m_i)_x + i(m_i)_y$, so ergeben sich die Ausdrücke für K und M aus den entsprechenden Ausdrücken für die Quellen durch Ersetzung von q_k durch m_k und E_k^* durch dE_i^*/dz . Man hat also allgemein folgende Formeln für die an einem Leiter wirkende Kraft bei Vorhandensein eines Systems von Quellen und Dipolen

$$(16) \quad \begin{cases} K = -\frac{i}{8\pi} \oint_0 \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz \\ \quad = -\frac{i}{8\pi} \oint_P \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 dz - \frac{1}{4\pi} \sum_k q_k E_k^* - \frac{1}{4\pi} \sum_i m_i \left(\frac{dE_i^*}{dz}\right) z_i, \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} M + iN = \frac{1}{8\pi} \oint_0 \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 z dz \\ \quad = \frac{1}{8\pi} \oint_P \left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 z dz - \frac{i}{4\pi} \sum_k z_k q_k E_k^* - \frac{i}{4\pi} \sum_i z_i m_i \left(\frac{dE_i^*}{dz}\right) z_i. \end{cases}$$

Wie die verhältnismäßig einfache Rechnung nach diesen Formeln im einzelnen durchzuführen ist, soll an einigen bemerkenswerten Sonderfällen aufgezeigt werden.

2. Anwendung auf einfache Sonderfälle

a) *Elliptischer Zylinder im homogenen Feld.* Das Äußere der Ellipse in der z -Ebene wird durch

$$(18) \quad z = z' + \frac{p^2}{z'} \quad (p < R)$$

konform auf das Äußere eines Kreises $|z'| = R$ in der z -Ebene abgebildet. Mit Polarkoordinaten hat man

$$x = \left(r + \frac{p^2}{r}\right) \cos \varphi; \quad y = \left(r - \frac{p^2}{r}\right) \sin \varphi.$$

Setzt man nun

$$r + \frac{p^2}{r} = c \mathfrak{Cof}(\xi + \alpha); \quad r - \frac{p^2}{r} = c \mathfrak{Sin}(\xi + \alpha),$$

so wird

$$z = c [\mathfrak{Cof}(\xi + \alpha) \cos \varphi + i \mathfrak{Sin}(\xi + \alpha) \sin \varphi].$$

Mit $\varphi \equiv \eta$ gewinnt man daher die Darstellung

$$(19) \quad z = c \mathfrak{Cof}(\zeta + \alpha)$$

in den elliptischen Koordinaten ξ und η . $\xi = 0$ soll der Hauptellipse als Querschnitt des leitenden Zylinders zugeordnet sein. Jeder Wert von ξ liefert eine Ellipse der konfokalen Schar. Es ergibt sich weiter

$$(20) \quad \begin{cases} c [\mathfrak{Cof}(\xi + \alpha) + \mathfrak{Sin}(\xi + \alpha)] = c e^{\xi + \alpha} = 2r; & c = 2p; \\ r = \frac{1}{2} c e^{\xi + \alpha} = p e^{\xi + \alpha}. \end{cases}$$

Der Halbmesser des Grundkreises in der z -Ebene hat den Wert

$$(21) \quad R = \frac{1}{2} c e^{\alpha}.$$

Das komplexe Potential des im Unendlichen homogenen elektrostatischen Feldes in der Umgebung des Kreiszyinders hat die Form

$$(22) \quad \Omega = -E_0 \left[z' e^{-i\delta} - \frac{R^2}{z'} e^{i\delta} \right],$$

wo δ den Winkel zwischen der Krafrichtung des homogenen Feldes und der x -Achse bezeichnet. Im großen Abstand vom Zylinder hat man

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= -E_0 z' e^{-i\delta} = -E_0 z e^{-i\delta} \\ -\frac{d\Omega_0}{dz} &= E_0 e^{-i\delta}. \end{aligned}$$

Führt man in Ω

$$z' = \frac{1}{2} c e^{\zeta + \alpha}$$

ein, so wird

$$\Omega = -\frac{E_0 c}{2} [e^{\zeta + \alpha + i(\eta - \delta)} - e^{-\zeta + \alpha + i(\delta - \eta)}]$$

oder nach geringer Umformung

$$(23) \quad \begin{cases} \Omega = E_0 c e^{-\zeta} \operatorname{Co}[(\alpha + i\delta) - E_0 c e^{-i\delta} \operatorname{Co}(\zeta + \alpha) \\ = -E_0 z e^{-i\delta} + E_0 c e^{-\zeta} \operatorname{Co}(\alpha + i\delta). \end{cases}$$

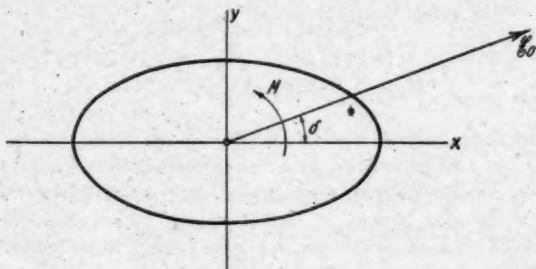


Abb. 2. Leitender elliptischer Zylinder im homogenen elektrostatischen Feld

Um den Ausdruck in der Koordinate z auszudrücken, hat man $e^{-\zeta} = u$ aus der Gleichung zweiten Grades

$$2 \frac{z}{c} = u e^{-\alpha} + \frac{1}{u} e^{\alpha}$$

auszurechnen und erhält den Wert

$$c u = e^{\alpha} (z - \sqrt{z^2 - c^2}),$$

mit dem dann das Potential die Form

$$(24) \quad \Omega = -E_0 e^{-i\delta} z + E_0 e^{\alpha} \operatorname{Co}[(\alpha + i\delta) (z - \sqrt{z^2 - c^2})]$$

annimmt. Für die Ableitung nach z und die ersten Glieder ihrer Entwicklung erhalten wir

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{d\Omega}{dz} = -E_0 e^{-i\delta} + E_0 e^{\alpha} \operatorname{Co}[(\alpha + i\delta) \left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}}\right] \\ = -E_0 e^{-i\delta} - E_0 e^{\alpha} \operatorname{Co}[(\alpha + i\delta) \frac{c^2}{2z^2} + \dots \end{cases}$$

Da das äußere Gebiet regulär ist, so ergibt sich aus dem Residuumsatz sofort, daß die auf den Zylinder ausgeübte Kraft verschwindet.

Für das Moment erhalten wir dagegen aus

$$\frac{1}{8\pi} \oint \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 z dz = \frac{1}{8\pi} \oint \left[-E_0 e^{i\delta} - E_0 e^{\alpha} \operatorname{Cof}(\alpha + i\delta) \frac{c^2}{2z^2} + \dots \right]^2 z dz \\ = \frac{1}{4} E_0^2 c^2 e^{-i\delta} \operatorname{Cof}(\alpha + i\delta)$$

durch Absonderung des Realteils den Ausdruck

$$(26) \quad M = \frac{1}{8} E_0^2 c^2 \sin 2\delta.$$

Mit Einführung der Halbachsen a und b

$$a = c \operatorname{Cof} \alpha; \quad b = c \operatorname{Sin} \alpha$$

wird

$$(27) \quad M = \frac{1}{8} E_0^2 (a^2 - b^2) \sin 2\delta.$$

Wenn die lange Achse der Ellipse in die y -Achse fällt, ist das Vorzeichen von p^2 zu ändern, bzw. die hyperbolischen Funktionen Cof und Sin in den Formeln zu vertauschen. M wird dann negativ. Das Moment wirkt also immer so, daß die lange Achse der Ellipse auf kürzestem Wege in die Richtung des homogenen Feldes gedreht wird.

b) *Leitender Kreis- und elliptischer Zylinder in einem Quellfeld.* Diese beiden Fälle, die von R. M. Morris ziemlich umständlich behandelt werden, lassen sich mit Hilfe der gegebenen Formeln sehr einfach erledigen. Wenn der Quellpunkt Q in der z' -Ebene die komplexe Koordinate

$$z'_k = \rho e^{i\psi}$$

hat und der Halbmesser des Grundkreises wieder mit R bezeichnet wird, so erhält man für das komplexe Potential des elektrostatischen Feldes in der Umgebung des Zylinders nach dem Spiegelungsprinzip

$$(28) \quad \Omega = -\frac{q}{2\pi} \lg \left[\frac{z'(z' - z'_k)}{z' - \frac{R^2}{\rho} e^{i\psi}} \right]$$

und die Feldstärke

$$(29) \quad E = -\frac{d\Omega}{dz} = \frac{q}{2\pi} \left[\frac{1}{z' - z'_k} + \frac{1}{z'} - \frac{1}{z' - \frac{R^2}{\rho} e^{i\psi}} \right].$$

Die Feldstärke E^* im Quellpunkt, hervorgerufen durch das übrige Feld, wird

$$(30) \quad E_k^* = -\frac{q}{2\pi} e^{-i\psi} \frac{R^2}{\rho(\rho^2 - R^2)}.$$

Da das Blasiusche Integral längs der Randkurve F verschwindet, so erhält man ohne weiteres für den gespiegelten Kraftvektor

$$(31) \quad \bar{K} = \frac{1}{8\pi^2} q^2 e^{-i\nu} \frac{R^2}{\varphi(q^2 - R^2)}$$

ein Ergebnis, das man natürlich auch direkt gewinnen kann. Der Kreiszylinder wird von der Quelle in der Richtung der Verbindungslinie des Mittelpunktes mit dem Quellpunkt angezogen. Das Moment verschwindet. Abb. 4 gibt das Bild der Potentialflächen.

Für die Übertragung auf den elliptischen Zylinder benutzen wir wieder die vermittelnde Koordinate ζ und die Transformationsgleichungen

$$(32) \quad \begin{cases} z' = \frac{1}{2} c e^{\zeta + \alpha}, \\ z = c \operatorname{Cof}(\zeta + \alpha). \end{cases}$$

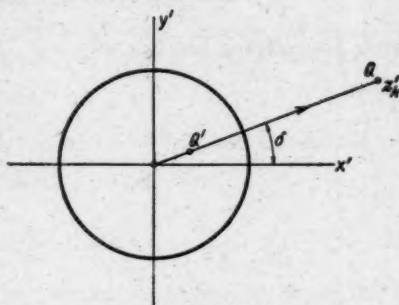


Abb. 3. Kreiszylindrische Leiter im elektrostatischen Feld einer Quelllinie

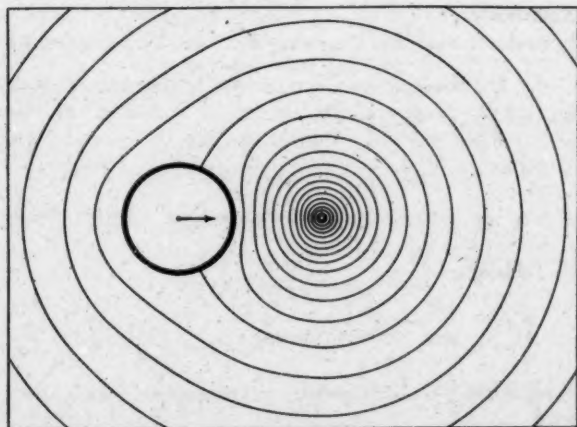


Abb. 4. Potentialflächen in der Umgebung eines kreiszylindrischen Leiters im Felde einer Quelllinie

Die Bestimmung der Kraft hängt wieder ab von der Feldstärke E_k^* , die am Ort der Quelle von dem übrigen Feld hervorgerufen wird. Allgemein erhalten wir

$$(33) \quad E = - \frac{d\Omega}{dx'} \frac{dx'}{d\zeta} : \frac{dz}{d\zeta} = - \frac{d\Omega}{dx'} \frac{e^{\zeta+a}}{2 \sin(\zeta+a)}.$$

Die Größe E_k^* entsteht dann dadurch, daß wir von dem Grenzwert E für den Quellpunkt, d. h. für $\zeta = \zeta_k$ den von der Quelle herrührenden Betrag

$$\frac{q}{2\pi} \cdot \frac{1}{z - z_k}$$

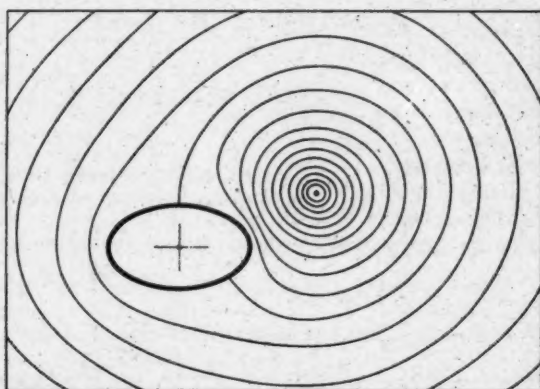


Abb. 5. Potentialflächen in der Umgebung eines leitenden elliptischen Zylinders im Felde einer Quelllinie

subtrahieren. Es ist daher

$$E_k^* = \left(\frac{d\Omega}{dx'} \frac{e^{\zeta+a}}{2 \sin(\zeta+a)} \right)_{\zeta \rightarrow \zeta_k} - \frac{q}{2\pi} \left(\frac{1}{z - z_k} \right)_{\zeta \rightarrow \zeta_k}$$

Spalten wir in dem ersten Ausdruck den endlich bleibenden Bestandteil ab, der mit

$$\left[E^*(x') \frac{dx'}{dz} \right]_{\zeta_k} = E_1^*$$

identisch ist, so wird mit Einführung von ζ

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} E_1^* &= \frac{q}{2\pi c} \left[e^{-\zeta_k} - \frac{e^{-i\eta_k}}{e^{\zeta_k} - e^{-\zeta_k}} \right] \frac{e^{\zeta_k}}{\sin(\zeta_k + a)} \\ &= - \frac{q}{4\pi c} \frac{e^{-\zeta_k}}{\sin \zeta_k (\sin \zeta_k + a)}. \end{aligned} \right.$$

Der übrigbleibende Teil, der zunächst die unbestimmte Form $\infty - \infty$ annimmt, wird

$$\begin{aligned} E_2^* &= \frac{q}{2\pi} \left[\frac{1}{z' - z_k} \frac{dz'}{dz} - \frac{1}{z - z_k} \right] \\ &= \frac{q}{2\pi c} \left[\frac{e^{\zeta + \alpha}}{(e^{\zeta + \alpha} - e^{\zeta_k + \alpha}) \operatorname{Sin}(\zeta + \alpha)} - \frac{1}{\operatorname{Cos}(\zeta + \alpha) - \operatorname{Cos}(\zeta_k + \alpha)} \right] \zeta \rightarrow \zeta_k \end{aligned}$$

Setzt man $\zeta = \zeta_k + t$ und betrachtet t als kleine Größe, so ergibt sich angenähert

$$\begin{aligned} e^{\zeta + \alpha} - e^{\zeta_k + \alpha} &\sim e^{\zeta_k + \alpha} (e^t - 1); \quad e^{\zeta + \alpha}: (e^{\zeta + \alpha} - e^{\zeta_k + \alpha}) \sim \frac{1}{t} \left(1 + \frac{1}{2} t \right), \\ \operatorname{Sin}(\zeta + \alpha) &= \operatorname{Sin}(\zeta_k + \alpha) + t \operatorname{Cos}(\zeta_k + \alpha) = \operatorname{Sin}(\zeta_k + \alpha) [1 + t \operatorname{Tg}(\zeta_k + \alpha)], \\ \operatorname{Cos}(\zeta + \alpha) &\sim \operatorname{Cos}(\zeta_k + \alpha) \left(1 + \frac{t^2}{2} \right) + t \operatorname{Sin}(\zeta_k + \alpha); \\ \operatorname{Cos}(\zeta + \alpha) - \operatorname{Cos}(\zeta_k + \alpha) &\sim t \operatorname{Sin}(\zeta_k + \alpha) \left[1 + \frac{1}{2} t \operatorname{Tg}(\zeta_k + \alpha) \right] \text{ usw.} \end{aligned}$$

Daher kommt

$$(35) \quad E_2^* = \frac{q}{4\pi c \operatorname{Sin}(\zeta_k + \alpha)} [1 - \operatorname{Tg}(\zeta_k + \alpha)].$$

Wir erhalten also im ganzen

$$(36) \quad E_1^* = \frac{q}{4\pi c \operatorname{Sin}(\zeta_k + \alpha)} [2 - \operatorname{Tg} \zeta_k - \operatorname{Tg}(\zeta_k + \alpha)]$$

und damit für den konjugierten Kraftvektor den Ausdruck

$$(37) \quad K_x - i K_y = - \frac{q^2}{16\pi^2 c \operatorname{Sin}(\zeta_k + \alpha)} [2 - \operatorname{Tg} \zeta_k - \operatorname{Tg}(\zeta_k + \alpha)].$$

Setzt man die Werte

$$\operatorname{Cos}(\zeta_k + \alpha) = \frac{z_k}{c}, \quad e^{\zeta_k} = \frac{\rho}{R}$$

ein, so kann man (37) auch in folgende Form setzen

$$(38) \quad K_x - i K_y = - \frac{q^2}{16\pi^2 \sqrt{z_k^2 - c^2}} \left[\frac{\rho^2 - 3R^2}{\rho^2 - R^2} - \frac{z_k}{\sqrt{z_k^2 - c^2}} \right]$$

Wird im besonderen die Exzentrizität $c = 0$, $z' = z$ usw., so erhält man daraus den früher berechneten Wert für die Kraft an einem in ein Quellfeld hineingestellten Kreiszylinder. Für das Moment hat man

$$(39) \quad \begin{cases} M + i N = - \frac{1}{4\pi} z_k q E_1^* \\ = - \frac{i q^2}{16\pi^2} \operatorname{Tg}(\zeta_k + \alpha) [2 - \operatorname{Tg} \zeta_k - \operatorname{Tg}(\zeta_k + \alpha)] \\ = - \frac{i q^2}{16\pi^2} \frac{z_k}{\sqrt{z_k^2 - c^2}} \left[\frac{\rho^2 - 3R^2}{\rho^2 - R^2} - \frac{z_k}{\sqrt{z_k^2 - c^2}} \right]. \end{cases}$$

Um den Übergang zum Fall des im Unendlichen homogenen Feldes zu vollziehen, lassen wir ρ und q ins Unendliche wachsen, während

$$\frac{q}{2\pi\rho} = E_0.$$

endlich bleibt. Man sieht dann, daß das Moment in den unter a) angegebenen Wert übergeht. Abb. 5 gibt das Bild der Potentialflächen in der Umgebung des Zylinders.

c) *Näherungslösung für zwei leitende gleiche Kreiszylinder im homogenen Feld.* Wenn das ungestörte homogene Feld die Richtung



Abb. 6. Zwei kreiszylindrische Leiter im homogenen Feld: parallel der Zentralen beider Kreise (Fall 1)

der positiven x -Achse hat, so läßt sich das gestörte Feld angenähert durch zwei zusätzliche, nach der positiven x -Richtung orientierte Dipole in den Mittelpunkten der Kreise darstellen, deren Momente die Werte

$$m = 2\pi a^2 E_0$$

haben, wenn die Halbmesser der Kreise mit a bezeichnet werden. Haben die Mittelpunkte die Koordinaten $z = \pm d$, so wird das komplexe Potential des Gesamtfeldes

$$(40) \quad \Omega = -E_0 z + \frac{m}{2\pi} \left[\frac{1}{z-d} + \frac{1}{z+d} \right].$$

Für die Feldstärke erhalten wir daraus

$$(41) \quad \bar{E} = -\frac{d\Omega}{dz} = E_0 + \frac{m}{2\pi} \left[\frac{1}{(z-d)^2} + \frac{1}{(z+d)^2} \right].$$

Das erste Randintegral längs der beide Kreise einschließenden Kurve F wird Null. Um die Kraft zu berechnen, die auf den Zylinder mit dem Mittelpunkt in $z = d$ wirkt, haben wir in dem Ausdruck für die Feldstärke den von dem äußeren Dipol $z = -d$ herrührenden Teil zu unterdrücken und den übrig bleibenden Ausdruck nach z zu differenzieren und $z = -d$ zu setzen. Das gibt

$$(42) \quad \left(\frac{d\bar{E}}{dz} \right)_{z=-d} = \frac{m}{8\pi d^3} = \frac{a^2 E_0}{4d^3}.$$

Für die Kraft erhalten wir dann nach der allgemeinen Formel

$$(43) \quad \bar{K} = K_z = -\frac{m^2}{32\pi^2 d^3} = -\frac{1}{8} E_0^2 a \left(\frac{a}{d}\right)^3.$$

Die Zylinder ziehen sich an mit einer Kraft, die mit der ersten Potenz der Halbmesser und der dritten Potenz des Verhältnisses a/d proportional ist. Bei ungleichen Kreisen tritt an Stelle der vierten Potenz der gleichen Radien das Produkt der zweiten Potenzen der ungleichen Radien.



Abb. 7. Zwei kreiszylindrische Leiter im homogenen Feld: senkrecht zur Zentralen beider Kreise (Fall 2)

Wenn das ungestörte homogene Feld die Richtung der positiven y -Achse hat, so haben wir für Potential und Feldstärke die Ausdrücke

$$(44) \quad \Omega = i E_0 z + \frac{i m}{2\pi} \left(\frac{1}{z-d} + \frac{1}{z+d} \right),$$

$$(45) \quad E = -\frac{d\Omega}{dz} = -i E_0 + \frac{i m}{2\pi} \left[\frac{1}{(z-d)^2} + \frac{1}{(z+d)^2} \right].$$

Die beiden den Einfluß der Kreise ersetzenden Dipole sind nach der y -Richtung orientiert. Bei Anwendung derselben Methode wie im ersten Falle erhalten wir

$$(46) \quad \left(\frac{dE^2}{dz} \right)_{z=0} = \frac{i m}{8\pi d^2}$$

und daher

$$(47) \quad \bar{K} = \frac{1}{8} E_0^2 a \left(\frac{a}{d}\right)^3.$$

Die beiden Zylinder stoßen sich mit einer Kraft ab, die denselben Gesetzen folgt wie die Anziehungskraft im ersten Falle.

3. Strenge Behandlung des Falles zweier ungeladener Kreiszylinder im homogenen Felde

Das genaue Potential des durch zwei Kreiszylinder bestimmten Feldes kann bekanntlich dadurch ermittelt werden, daß man die gesamte Reihe der Dipole aufstellt, die mit dem im Unendlichen

gelegenen Dipol bzw. seinen ersten oben bereits benutzten Spiegelbildern beginnt und durch fortgesetzte alternierende Spiegelung an beiden Kreisen vervollständigt wird¹⁾. Wesentlich eleganter gestaltet sich der Ansatz, wenn man elliptische Funktionen²⁾ verwendet. Man benutzt zu dem Zweck die beiden Pole Q_1 und Q_2 mit den Koordinaten

$$z = \pm b = \pm \sqrt{d^2 - a^2}$$

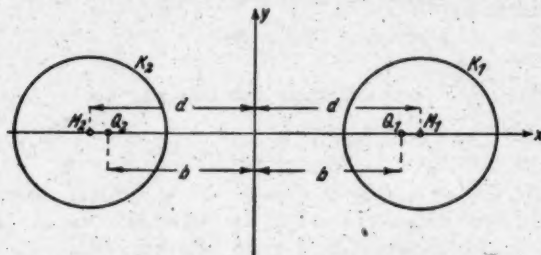


Abb. 8. Zur Einführung der bipolaren Koordinaten

des durch die Kreise K_1 und K_2 bestimmten Appollonischen Büschels (vgl. Abb. 8). Mit Hilfe der bipolaren Koordinaten bzw. durch die Transformation

$$(48) \quad z = b \operatorname{ctg} \frac{Z}{2}; \quad Z = \lg \frac{z+b}{z-b}$$

läßt sich das Außengebiet der Kreise unendlich vieldeutig auf die Z -Ebene und eindeutig auf das Innere eines Rechtecks mit den



Abb. 9. Bildrechteck der Z -Ebene für die konforme Abbildung des Außengebietes zweier Kreise in der z -Ebene (Fall 2)

Eckpunkten $X = \pm \alpha$, $Y = \pm \pi$ abbilden, wobei die beiden Seiten $X = \pm \alpha$ den Kreisen und die Seiten $Y = +\pi$ dem unteren und oberen Ufer eines Schnittes entsprechen, der längs der X -Achse zwischen den Kreisen geführt wird. Der im Inneren des Rechtecks gelegene Punkt $Z = 0$ entspricht dem unendlich fernen Punkt der z -Ebene (vgl. Abb. 9).

1) Wilhelm Müller, Z. f. angew. Math. u. Mechanik 9. S. 205f. 1929.

2) Wilhelm Müller, Z. f. angew. Math. u. Mechanik 8. S. 447. 1928; M. Lagally, Z. f. angew. Math. u. Mechanik 9. S. 299. 1929.

a) Wir betrachten zuerst den Fall, daß die Feldstärke des ungestörten Feldes die Richtung der positiven y -Achse hat. Dann haben wir im Inneren an

$$\Omega_0 = i E_0 z = i E_0 b \operatorname{Ctg} \frac{Z}{2}.$$

Die Funktion $\operatorname{Ctg} \frac{Z}{2}$ hat in $Z = 0$ einen Pol erster Ordnung und läßt sich in der Umgebung dieses Punktes in die Reihe

$$\operatorname{Ctg} \frac{Z}{2} = \frac{1}{Z} \left[2 + \frac{1}{6} Z^2 + \dots \right]$$

entwickeln. Das Potential verhält sich hier also wie

$$\Omega_0 = \frac{2 i b E_0}{Z} + \dots$$

Der Punkt $Z = 0$ ist also ein nach der y -Richtung orientierter Dipol mit dem Moment $i 4 \pi b E_0$. Es ergibt sich weiter, daß das Feld \mathcal{E}' in der Z -Ebene die Periode $2 i \pi$ hat. Damit die Seiten $X = \pm \alpha$ Potentiallinien werden, müssen alle im Bildrechteck und außerhalb desselben liegende Singularitäten des Feldes \mathcal{E}' symmetrisch zu diesen Geraden angeordnet sein, so daß sich das ganze Feld spiegelbildlich über beide Geraden fortsetzen läßt. Die Ableitung $\frac{d\Omega(Z)}{dZ}$ muß also eine doppelt periodische Funktion mit den Perioden

$$2\omega_1 = 2\omega = 4\alpha; \quad 2\omega_2 = 2i\omega' = 2i\pi$$

sein. Zur Darstellung kann man z. B. die Weierstrasssche Funktion $\zeta(Z)$ benutzen, die sich aus der Funktion $p(Z)$ bzw. $p'(Z)$ wie folgt ableiten läßt

$$(49) \quad \begin{cases} p'(Z) = \frac{dp}{dx} = \sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3} = 2 \sqrt{(p - e_1)(p - e_2)(p - e_3)} \\ \frac{d\zeta(Z)}{dZ} = -p(Z). \end{cases}$$

Die Funktion $\zeta(Z)$ besitzt in $Z = 0$ und in den dazu kongruenten Punkten $2m\omega_1 + 2n\omega_2$ Pole erster Ordnung, die für das Potentialfeld $\zeta(Z)$ die Bedeutung von Dipolen haben, deren Achse in die x -Richtung gestellt sind. Man sieht weiter, daß das ζ -Feld einen homogenen Bestandteil enthält, den man in Abzug bringen muß, um ein reines doppelt periodisches Dipolfeld zu erhalten, entsprechend der Hermiteschen Funktion

$$H(Z) = \zeta - \frac{\zeta(\omega_2)}{\omega_2} Z = \zeta - \frac{\eta_2}{\omega_2} Z.$$

Für manche Darstellung ist es vorteilhaft, statt ζ , p , p' die komplementären Funktionen ζ_c , p_c , p'_c einzuführen, die aus den ursprünglichen Funktionen dadurch entstehen, daß man die Periodenzahlen ω und ω' miteinander vertauscht oder das Vorzeichen der Invariante g , ändert. Man hat dann z. B.

$$(50) \quad \begin{cases} \zeta(i\omega) = \zeta(\omega_2) = -i(\zeta_c(\omega') = \eta_2 = -i\eta', \\ H(\zeta) = \zeta - \frac{\eta_2}{\omega_2} Z = \zeta + \frac{\eta'}{\omega'} Z. \end{cases}$$

Wenn man nun den Dipol in $Z = 0$ an der Seite $X = -\alpha$ spiegelt, so erhält man einen entgegengesetzt orientierten Dipol. Damit hebt sich bei der Differenz der entsprechenden ζ -Funktionen die lineare Funktion heraus und wir erhalten als Potential des gesuchten Feldes in der Z -Ebene bis auf eine Konstante

$$(51) \quad \Omega(Z) = 2ibE_0[\zeta(Z) - \zeta(Z + 2\alpha)].$$

Für viele Zwecke empfiehlt es sich, für den Klammerausdruck eine Reihenentwicklung nach hyperbolischen Funktionen zu benutzen die aus den trigonometrischen Reihen der Vermittlung der komplementären Funktionen zu gewinnen sind. Nach dem Additionstheorem für die ζ -Funktion hat man zunächst, da $p(2\alpha) = e_1$; $p'(2\alpha) = 0$ wird,

$$(52) \quad \zeta(Z + 2\alpha) - \zeta(Z) = \zeta(2\alpha) + \frac{1}{2} \frac{p'(Z)}{p(Z) - e_1}.$$

Führt man die Größe

$$q' = e^{-\pi \frac{\omega}{\omega'}} = e^{-2\alpha}$$

ein, so hat man für den zweiten Ausdruck rechts die bekannte Reihenentwicklung

$$(53) \quad \frac{1}{2} \frac{p'(Z)}{p(Z) - e_1} = -\frac{1}{2} \left[\operatorname{Ctg} \frac{Z}{2} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q'^n}{1 + q'^n} \operatorname{Sin} nZ \right].$$

Daher kommt nach Weglassung der Konstanten

$$(54) \quad \Omega(Z) = ia \operatorname{Sin} \alpha E_0 \left[\operatorname{Ctg} \frac{Z}{2} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Sin} nZ}{1 + e^{2na}} \right].$$

Daraus leitet sich die Feldstärke ab

$$(55) \quad \bar{E} = -iE_0 \left[1 - 8 \operatorname{Sin}^2 \frac{Z}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{Cos} nZ}{e^{2na} + 1} \right].$$

W
Zu
ein
Kr

Für
sch

wor

ergi
Z =
mit
zyli
die
vorl

am

(56)

Zur Prüfung der Formel wollen wir etwa die Werte $Z = \pm \alpha$, $Y = 0$ einsetzen, die den äußeren Schnittpunkten der Zentralen mit den Kreisen entsprechen. Man erhält in diesem Fall

$$\bar{E} = -iE_0 \left[1 - 4\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n\alpha} \right]$$

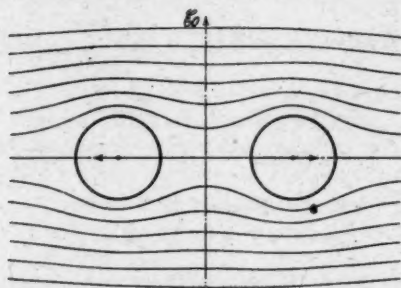


Abb. 10. Potentiallinienbild für zwei kreisförmige Leiter im homogenen Feld (Fall 2)

Für die in der Klammer vorkommende Summe kann man aber schreiben

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n\alpha} = \frac{e^{-\alpha}}{(1 - e^{-\alpha})^2} = \frac{1}{4\sin^2 \frac{\alpha}{2}},$$

woraus sich

$$(\bar{E})_{Z=\pm\alpha} = 0$$

ergibt, wie zu erwarten war. Dasselbe kann man nachweisen für $Z = \pm \alpha + i\pi$. Die genannten vier Punkte trennen die Gebiete mit positiver und negativer Ladung auf den Kreisen bzw. Kreiszyklindern und entsprechen den Staupunkten der Idealströmung um die Kreiszyklinder, deren Stromlinien mit den Potentiallinien des vorliegenden Falles übereinstimmen (vgl. Abb. 10).

Die auf den Zylinder $K_1 (Z = \alpha)$ wirkende Kraft berechnet sich am einfachsten aus dem Blasius'schen Integral

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{K} &= -\frac{i}{8\pi} \int_{\alpha+i\pi}^{\alpha-i\pi} \left(\frac{d\Omega}{dZ} \right)^2 \frac{dZ}{dz} dZ \\ &= \frac{ibE_0}{4\pi} \int_{\alpha-i\pi}^{\alpha+i\pi} \left[-\frac{1}{2\sin \frac{Z}{2}} + 4\sin \frac{Z}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos nZ}{e^{2n\alpha} + 1} \right]^2 dZ. \end{aligned} \right.$$

Zur Auswertung benutzen wir folgende unmittelbar verständlichen Integrale

$$(57) \left\{ \begin{aligned} & \int_{a-i\pi}^{a+i\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{Z}{2}} dZ = \left[\frac{1}{2} \operatorname{Ctg} \frac{Z}{2} \right]_{a-i\pi}^{a+i\pi} = 0; \quad \int_{a-i\pi}^{a+i\pi} \operatorname{Cof} n Z dZ = 0 \\ & \int_{a-i\pi}^{a+i\pi} \operatorname{Cof} n Z \operatorname{Cof} m Z dZ = 0 \quad (m \neq 0); \quad \int_{a-i\pi}^{a+i\pi} \operatorname{Cof}^2 n Z dZ = i\pi \\ & \int_{a-i\pi}^{a+i\pi} (\operatorname{Cof} Z - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \operatorname{Cof}^2 n Z dZ}{(1 + e^{2na})} = -i\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1 + e^{2na})} \\ & \int_{a-i\pi}^{a+i\pi} \sum_{\substack{n,m=1 \\ n \neq m}}^{\infty} \frac{\operatorname{Cof} Z \operatorname{Cof} n Z \operatorname{Cof} m Z dZ}{(1 + e^{2na})(1 + e^{2ma})} \\ & \quad = \frac{1}{2} \int \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{nm [\operatorname{Cof} (n+1) Z + \operatorname{Cof} (n-1) Z] \operatorname{Cof} m Z dZ}{(1 + e^{2na})(1 + e^{2ma})} \\ & \quad = i\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(1 + e^{2na})(1 + e^{2(n+1)a})} \end{aligned} \right.$$

Dadurch erhalten wir für die Kraft folgende Reihenentwicklung

$$(58) \left\{ \begin{aligned} K = K_z &= 2a E_0^2 \operatorname{Sin} \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{2na} + 1} \left[\frac{n}{1 + e^{2na}} - \frac{n+1}{1 + e^{2(n+1)a}} \right] \\ &= \frac{1}{2} a E_0^2 \operatorname{Sin} \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{-2na}}{\operatorname{Cof} n \alpha} \left[\frac{n}{\operatorname{Cof} n \alpha} - \frac{(n+1) e^{-a}}{\operatorname{Cof} (n+1) \alpha} \right] \end{aligned} \right.$$

Wenn wir die Reihe bis $n=1$ berücksichtigen, und $\operatorname{Cof} \alpha = \frac{d}{a}$ setzen, so ergibt sich in Bestätigung der früheren Darlegungen

$$(58a) \quad K \sim \frac{1}{8} E_0^2 a \left(\frac{a}{d} \right)^2 \left(1 - \frac{a^2}{d^2} \right).$$

Diese und weitere Näherungen kann man auch erhalten, wenn man von den durch Spiegelung gewonnenen Dipolen ausgeht, wie in meinen früheren Betrachtungen zum hydrodynamischen Problem gezeigt wurde.

b) In ähnlicher Weise läßt sich das Potential gewinnen für den Fall, daß das ungestörte homogene Feld die Richtung der x -Achse hat. Wir haben im großen Abstand

$$\Omega = \Omega_0 = -E_0 z = -E_0 b \operatorname{Ctg} \frac{Z}{2}.$$

Der Punkt $Z = 0$ ist in diesem Falle ein Dipol mit dem gerichteten Moment $-4\pi b E_0$, der an $X = -\alpha$ gespiegelte Dipol hat das gleiche Moment (Abb. 11). Wir erhalten also das Potential in der Form

$$(59) \quad \Omega = -2b E_0 \left[\zeta(Z) + \zeta(Z + 2\alpha) + \frac{2i\eta_3}{\pi} Z \right]$$

Nach dem Additionstheorem wird mit $\zeta(\omega) = \eta_1$

$$(60) \quad \zeta(Z) + \zeta(Z + 2\alpha) = 2\zeta(Z) + \eta_1 + \frac{1}{2} \frac{p'(Z)}{p(Z) - e_1}.$$

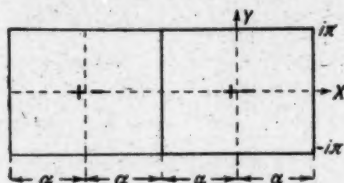


Abb. 11. Bildrechteck der Z -Ebene für die konforme Abbildung des Außengebietes zweier Kreise in der z -Ebene (Fall 1)

Mit Benutzung der Formel (53) und der Reihenentwicklung für $\zeta(Z)$

$$(61) \quad \zeta(Z) = -\frac{i\eta_3 Z}{\omega'} + \frac{\pi}{2\omega'} \operatorname{Ctg} \frac{2\omega'}{\pi Z} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} \frac{\pi}{\omega'} \operatorname{Sin} \frac{n\pi Z}{\omega'},$$

die in unserem Falle mit $\omega' = \pi$ in

$$(61a) \quad \zeta(Z) = -\frac{i\eta_3 Z}{\pi'} + \frac{1}{2} \operatorname{Ctg} \frac{Z}{2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1 - q^{2n}} \operatorname{Sin} nZ$$

übergeht, ergibt sich aus (60)

$$(62) \quad \begin{cases} \zeta(Z) + \zeta(Z + 2\alpha) + \frac{2i\eta_3}{\pi} Z = \eta_1 \\ + \frac{1}{2} \left[\operatorname{Ctg} \frac{Z}{2} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n\alpha} - 1} \operatorname{Sin} nZ \right], \end{cases}$$

wobei für die Größe $i\eta_3 = \eta'$ die Reihenentwicklung

$$(63) \quad \eta' = \frac{\pi^2}{2\omega'} \left\{ \frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4q^{2n}}{(1 - q^{2n})^2} \right\} = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{Sin}^2 2n\alpha} \right]$$

eingesetzt werden kann. Mit Weglassung der Konstanten ergibt sich dann aus (60) und (62) das gesuchte Potential in der Form

$$(64) \quad \Omega = -E_0 a \operatorname{Sin} \alpha \left[\operatorname{Ctg} \frac{Z}{2} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Sin} nZ}{e^{2n\alpha} - 1} \right]$$

und daraus die Feldstärke

$$(65) \quad E = E_0 \left[1 + 8 \operatorname{Sin}^2 \frac{Z}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \operatorname{Cos} nZ}{e^{2n\alpha} - 1} \right].$$

Das Potentiallinienbild in der Ebene ist in Abb. 12 dargestellt. Für die auf den Zylinder K_1 wirkende Kraft erhält man mit derselben Rechenmethode wie oben die Reihendarstellung

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} K = K_s &= -2 E_0^2 a \sin \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{2na} - 1} \left[\frac{n}{e^{2na} - 1} - \frac{n+1}{e^{2(n+1)a} - 1} \right] \\ &= -\frac{1}{2} E_0^2 a \sin \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{-2na}}{\sin n\alpha} \left[\frac{n}{\sin n\alpha} - \frac{(n+1)e^{-a}}{\sin(n+1)\alpha} \right] \end{aligned} \right.$$

die den Näherungswert ergibt

$$(67) \quad K_s = -\frac{1}{8} E_0^2 a \left(\frac{a}{d} \right)^2 \left(1 - \frac{a^2}{2d^2} \right).$$

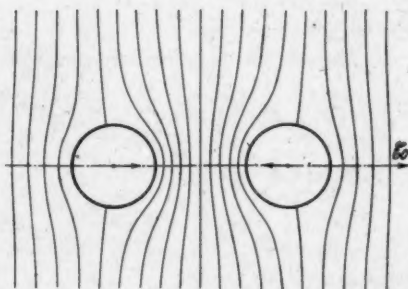


Abb. 12. Potentiallinienbild für zwei kreiszylindrische Leiter im homogenen Feld (Fall 1)

c) Wenn man nun beide unter a) und b) besprochenen Fälle verbindet und für die komplexe Feldstärke im Unendlichen

$$(E)_{\infty} = E_0 e^{i\delta}$$

setzt, also ein homogenes Feld annimmt, dessen Krafrichtung mit der x -Achse den Winkel δ bildet, so entsteht, wie man durch geringe Rechnung feststellt, das Potential

$$(68) \quad \Omega = -E_0 a \sin \alpha \left[e^{-i\delta} \operatorname{Utg} \frac{Z}{2} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-na} \cos(n\alpha + \delta) \sin nZ}{\sin 2n\alpha} \right],$$

dem die Feldstärke

$$(69) \quad \vec{E} = E_0 \left[e^{-i\delta} + 8 \sin^2 \frac{Z}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{-na} \cos(n\alpha + \delta) \cos nZ}{\sin 2n\alpha} \right]$$

entspricht. Für die auf den Zylinder K_1 bezogene Kraft erhalten wir, wenn wir wieder die Integrale (57), benutzen den Reihenausdruck

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} K &= 2 E_0^2 a \sin \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{-n\alpha} \cos[(n\alpha + i\delta)]}{\sin 2n\alpha} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{n e^{-n\alpha} \cos[(n\alpha + i\delta)]}{\sin 2n\alpha} - \frac{(n+1) e^{-(n+1)\alpha} \cos[(n+1)\alpha + i\delta]}{\sin 2(n+1)\alpha} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Für die erste Näherung hat man, wenn man $\frac{a^2}{d^2}$ neben (1) vernachlässigt

$$(71) \quad K \sim \frac{1}{8} E_0^2 a \left(\frac{a}{d} \right)^2 e^{2i\delta}.$$

Mit $\delta = 0$, bzw. $= \frac{\pi}{2}$ gelangt man wieder zu den früher angegebenen Näherungsausdrücken.

4. Die Berechnung der Kräfte in einem magnetischen Felde bei Vorhandensein von stationären elektrischen Strömen

a) *Der allgemeine Ansatz.* Wir setzen voraus, daß die stationären elektrischen Ströme in den zylindrischen Leitern die Richtung der z -Achse haben mögen und daß auch das sonst noch vorhandene magnetische Feld (mit der Permeabilität $\mu = 1$) als ebenes Feld behandelt werden kann. Nach dem Grundgesetz der elektromagnetischen Feldtheorie haben wir bei entsprechender Wahl der Einheit der Stromstärke J für das Linienintegral der magnetischen Feldstärke längs einer den Leiterquerschnitt umschließenden Kurve in der xy -Ebene

$$(72) \quad \oint \mathfrak{H} d\sigma = J = \int \text{rot } \mathfrak{H} d\sigma,$$

wo das letztere Integral über den Leiterquerschnitt zu erstrecken ist. Um die Kraft zu berechnen, die auf einen Leiter C in Gegenwart eines anderen stromführenden Leiter C' , ausgeübt wird, integrieren wir den Gradienten der Feldenergie über ein Gebiet, $R+S+S'$, das sich aus den Leiterquerschnitten S und S' und einem rotorfreien Gebiet R zusammensetzt und nach außen von der Kurve F begrenzt wird. Wenn wir auf die früheren allgemeinen Formeln zurückgreifen, \mathfrak{E} durch den magnetischen Feldvektor \mathfrak{H} ersetzen, ferner statt der Divergenz den Rotor von \mathfrak{H} beibehalten, so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{1}{8\pi} \int_V H^2 n df = \frac{1}{4\pi} \int_F \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{H} \cdot n df - \frac{1}{4\pi} \int_R \text{rot } \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_{S'} \text{rot } \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} d\sigma.$$

Nach dem Biot-Savartschen Gesetz ist aber der zweite Ausdruck rechts die auf den Leiter wirkende Kraft pro Längeneinheit. Wir haben daher

$$(73) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{K}_s &= \frac{1}{4\pi} \int_s \text{rot } \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} d\sigma = -\frac{1}{8\pi} \int_F H^2 n df + \frac{1}{4\pi} \int_F \mathfrak{H} \mathfrak{H} \cdot n df \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_{S_r} \text{rot } \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Es genügt wieder wie oben die beiden ersten Integrale für die Leiterkontur C zu ermitteln. Da in diesem Falle die Kraftlinien am Rande tangential verlaufen, so verschwindet das zweite Flächenintegral, während das erste wegen der am Rande gültigen Beziehung

$$H_x dy - H_y dx = 0$$

in der komplexen Darstellung wieder durch das Blasiusche Integral ersetzt werden kann. Mit der Bezeichnung

$$\mathfrak{G} = -\frac{1}{8\pi} \int_C H^2 n df$$

erhalten wir für den konjugiert komplexen Vektor $\bar{G} = G_x - iG_y$,

$$\bar{G} = -\frac{1}{8\pi} \int_C (H_x^2 + H_y^2)(dy + i dx) = -\frac{1}{8\pi} \int_C (H_x - iH_y)^2 (dx + i dy).$$

Bei der Berechnung des zweiten Integrals auf der rechten Seite beschränken wir uns wieder auf einen linearen Leiter mit unendlich kleinem Querschnitt, also auf einen Punktwirbel im Punkte z_r . Das Integral läßt sich dann leicht auf die Lagallysche Form bringen, wenn wir diesen Punktwirbel, in dessen Umgebung das Potential

$$\Omega = \frac{iJ}{2\pi} \lg(z - z_r)$$

gilt, als Quelle mit der imaginären Ergiebigkeit $-iJ$ auffassen, d. h. die früheren Formeln so umschreiben, daß q durch die Größe $-iJ$ ersetzt wird. Haben wir mehrere Punktwirbel mit den entsprechenden Stromstärken J_r , so entstehen die Formeln

$$(74) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{K}_s &= -\frac{i}{8\pi} \int_F \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 dz + \frac{i}{4\pi} \sum_r J_r \bar{H}_r^* \\ M + iN &= \frac{1}{8\pi} \int_F \left(\frac{d\Omega}{dz} \right)^2 z dz - \frac{1}{4\pi} \sum_r z_r J_r \bar{H}_r^*, \end{aligned} \right.$$

wo \bar{H}_r^* wieder die konjugiert komplexe magnetische Feldstärke bedeutet, die am Ort des Wirbels entsteht, wenn der Wirbel selbst nicht vorhanden wäre. Das Bemerkenswerte an diesen Formeln ist der Umstand, daß sie formal genau mit den für das elektrostatische Feld aufgestellten Beziehungen übereinstimmen, obwohl nicht nur die

Randbedingungen wesentlich andere geworden sind, sondern auch die zunächst auftretenden Integrale im zweiten Falle eine vollständig geänderte physikalische Bedeutung erfahren.

Bei der Anwendung auf Sonderfälle wollen wir uns auf zwei ganz einfache Fälle beschränken.

b) Zwei parallele geradlinige Stromleiter mit entgegengesetzten Stromrichtungen in einem homogenen magnetischen Feld. Wenn die

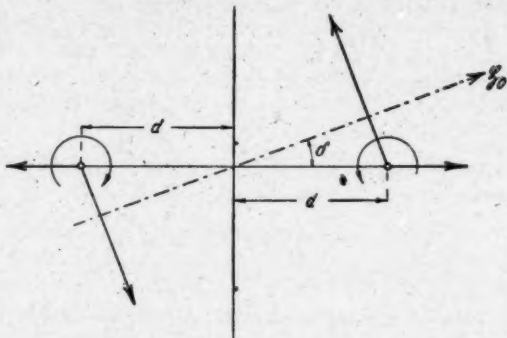


Abb. 13. Kraftwirkung zweier linearer Stromleiter mit entgegengesetzter Stromrichtung im homogenen magnetischen Feld

Spurpunkte der Leiter die Koordinaten $z = \pm d$ haben und die Kraftlinien des homogenen Feldes mit der Ebene der Leiter den Winkel δ bilden, so ist das Gesamtpotential

$$(75) \quad \Omega = -H_0 e^{-i\delta} z + \frac{iJ}{2\pi} \lg \frac{z-d}{z+d}$$

und die Feldstärke

$$(76) \quad \begin{cases} \vec{H} = -\frac{d\Omega}{dz} = H_0 e^{-i\delta} - \frac{iJ}{2\pi(z-d)} + \frac{iJ}{2\pi(z+d)} \\ \quad = H_0 e^{-i\delta} - \frac{iJd}{\pi z^2} + \dots \end{cases}$$

Das erste Integral, das die Resultierende der auf beide Leiter wirkenden Kräfte liefert, verschwindet. Für die auf den Leiter in $z = d$ entfallende Kraft erhalten wir dagegen mit

$$(\vec{H}^*)_{z=d} = H_0 e^{-i\delta} + \frac{iJ}{4\pi d}$$

den Wert

$$(77) \quad K = \frac{J^2}{16\pi^2 d} - \frac{iJH_0 e^{-i\delta}}{4\pi}$$

Er setzt sich aus zwei Teilen zusammen: der erste Teil gibt die in die z -Achse fallende abstoßende Wirkung der entgegengesetzten Ströme, der zweite Teil liefert in Übereinstimmung mit dem Biot-

Savartschen Gesetz eine Kraft senkrecht zu den Kraftlinien des homogenen Feldes. Wegen

$$\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 z = H_0^2 e^{-2is} z - \frac{2iH_0 J d e^{-is}}{\pi z}$$

erhält man als Gesamtmoment des auf beide Leiter wirkenden Kraftsystems

$$(78) \quad M = \frac{H_0 J d \cos \delta}{2\pi}.$$

Der zweite Ausdruck in der Momentenformel gibt

$$\Re \left[-\frac{1}{4\pi} J d \left(H_0 e^{-is} + \frac{iJ}{4\pi d} \right) \right] = -\frac{H_0 J d \cos \delta}{4\pi}.$$

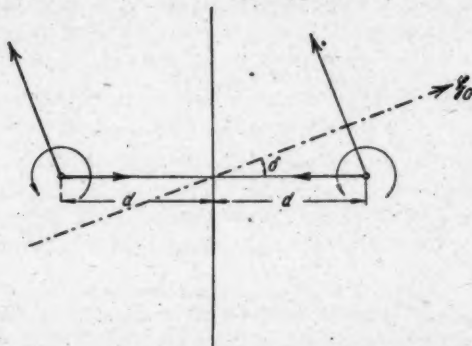


Abb. 14. Kraftwirkung zweier linearer Stromleiter mit gleicher Stromrichtung im homogenen magnetischen Feld

Als Moment der Kräfte am Leiter $z = d$ erhält man also

$$(79) \quad M_1 = \frac{H_0 J d \cos \delta}{4\pi},$$

d. h. die Hälfte des Gesamtmomentes, wie man auch unmittelbar aus der Anschauung entnehmen kann. Insgesamt reduziert sich das System der Kräfte auf ein Kräftepaar.

c) Sind die Ströme gleichgerichtet, so geht man aus von dem Potential

$$(80) \quad \Omega = -H_0 e^{-is} \cdot z + \frac{iJ}{2\pi} \lg(z^2 - d^2)$$

und dem entsprechenden Wert für die Feldstärke

$$(81) \quad H = H_0 e^{-is} - \frac{iJ}{2\pi} \left(\frac{1}{z-d} + \frac{1}{z+d} \right).$$

Aus

$$\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)^2 = H_0^2 e^{-2is} - \frac{2iJ}{\pi z} H_0 e^{-is} + \dots$$

erhalten wir für die senkrecht zu H_0 gerichtete Resultierende des Kraftsystems

$$(82) \quad K = -\frac{i}{2\pi} J H_0 e^{-is},$$

ferner wegen

$$(H^*)_{z=d} = H_0 e^{-\delta} + \frac{iJ}{4\pi d}$$

für die auf den Leiter $z = d$ wirkende Kraft

$$(83) \quad \begin{cases} K_1 = \frac{i}{2\pi} J H_0 e^{-\delta} + \frac{i}{4\pi} J \left(H_0 e^{-\delta} + \frac{iJ}{4\pi d} \right) \\ \quad = -\frac{i}{4\pi} J H_0 e^{-\delta} - \frac{J^2}{16\pi^2 d} \end{cases}$$

Ist z. B. $H_0 = 0$, so ergibt sich das Anziehungsgesetz für die gleichgerichteten Ströme.

Da die an beiden Leitern angreifenden, von H_0 abhängigen Kräfte gleich und gleichgerichtet sind, so verschwindet das Gesamtmoment, wie auch die Formel zeigt. Die am Leiter $z = d$ wirkenden Kräfte geben dagegen wie früher das Moment

$$(84) \quad M_1 = \frac{1}{4\pi} J H_0 d \cos \delta.$$

Damit ist die Art der Anwendbarkeit unserer allgemeinen Ansätze aufgezeigt. Die Behandlung weiterer wichtiger Sonderfälle, insbesondere die Ausdehnung der zuletzt skizzierten Entwicklung auf kreiszylindrische Stromleiter mit endlichem Querschnitt, muß einer besonderen Arbeit vorbehalten bleiben.

Zusammenfassung

Es werden einige allgemeine Formeln für die Berechnung der Kräfte und Momente an zylindrischen Leitern in ebenen elektrostatischen und elektromagnetischen Feldern entwickelt, die in einfacher Weise nach funktionentheoretischen Methoden ausgewertet werden können. Es ist bemerkenswert, daß die gewonnenen Ansätze eine große Verallgemeinerungsfähigkeit besitzen und sich bei entsprechender Änderung der Bedeutung der auftretenden Feldgrößen und Konstanten auf mehrere und die verschiedensten Gebiete der Physik anwenden lassen. In der vorliegenden Arbeit werden insbesondere die Fälle des Kreis- und elliptischen Zylinders im homogenen und im Felde einer Linearquelle, der Fall zweier Kreiszylinder im homogenen elektrostatischen Feld und schließlich die Überlagerung des Feldes zweier paralleler Linearströme mit einem homogenen magnetischen Feld behandelt.

München, Institut für theoretische Physik und angewandte Mechanik.

(Eingegangen 22. Februar 1943)

Namenregister zum Jahrgang 1942

5. Folge, Band 41—42

B

- Bandow, Fritz, Über die Phosphoreszenzzentren 41, 172.
 Bartholomeyczuk, W., Über die Aufzehrung von Edelgasen in Hohlkathoden und die damit verbundenen Vorgänge 42, 534.
 Becherer, G. u. Kast, W., Messungen der Viskosität kristalliner Flüssigkeiten nach der Helmholtzschen Methode 41, 355.
 Becker, A. u. Schaper, Ilsemarie, Über die Phosphoreszenzzerstörung der ZnS-Cu-Phosphore 42, 297. — Über die Phosphoreszenzzerstörung. II 42, 487.
 Bopp, Fritz, Lineare Theorie des Elektrons. II 42, 573.
 Brill, E., Hermann, C. u. Peters, Cl., Röntgenographische Fourier-Synthese von metallischem Magnesium 41, 37. — Röntgenographische Fourier-Synthese von Quarz 41, 233. — Röntgenographische Fourier-Synthese von Oxalsäure-Dihydrat 42, 357.
 Buchholz, Herbert, Die Ausbreitung der Schallwellen in einem Horn von der Gestalt eines Rotationsparaboloides bei Anregung durch eine im Brennpunkt befindliche punktförmige Schallquelle 42, 423.

D

- Dänzer, H., Ein Studienmodell des Zyklotrons 41, 485.
 Dunken, H., Absolutbestimmung von Oberflächen- und Grenzflächenspannungen nach der Tropfengewichtsmethode 41, 567.

E

- Erfling, H.-D. u. Grüneisen, E., Weitere Untersuchungen an Berylliumkristallen im transversalen und longitudinalen Magnetfeld 41, 89.
 Erfling, H.-D., Zur Anomalie des elektrischen Widerstands von Chrom (Nachtrag zu Untersuchungen von H. Söchtig) 41, 100. — Studien zur thermischen Ausdehnung fester Stoffe in tiefer Temperatur III (Ca, Nb, Th, V, Si, Ti, Zr) 41, 467.
 Eucken, A. vgl. Schäfer, Klaus 42, 176.

F

- Fischer, V., Die Kondensation von Dampfgemischen aus beliebig vielen Bestandteilen. II 42, 461.
 Frosch, E., Die Dielektrizitätskonstanten höherer Alkohole am Erstarrungspunkt 42, 254.

G

- Gerschlauer, W. vgl. Steiner, K. 42, 98.
 Geyer, Karl-Heinz, Über Eigenschaften der Ausbeute und Energieverteilung von Sekundärelektronen aus Aufdampfschichten wachsender Dicke 41, 117. — Beobachtungen an der Sekundärelektronenstrahlung aus Nichtleitern 42, 241. — Zur Kenntnis des Grundvorgangs der sekundären Elektronenstrahlung 42, 337.
 Gott, Adelheid, Thermische Gitterdehnung und makroskopische Ausdehnung von Alkalihalogenid-Schmelzfußkristallen 41, 520.
 Grassmann, P., Über den Wirkungsgrad von Wärmeaustauschern 42, 203.
 Gruber, Friedr., Ableitung der Frequenzbedingung $E_{ph} = h\nu$ 41, 167.
 Grüneisen, E. vgl. Erfling, H.-D. 41, 89.

H

- Harms, B. vgl. Vogt, E. 42, 501.
 Hermann, C. vgl. Brill, R. 41, 37, 233; 42, 357.
 Hermann, C., Untersuchungen über die Trennung nahe benachbarter Maxima 42, 378.
 Hilsch, R., Anlage zur Verflüssigung von Wasserstoff 42, 165.

J

- Joos, G., Ergebnisse einer Untersuchung von H. Meyer über die Ionisierung von H_2 und D_2 durch He- und durch Ne-Kanalstrahlen 41, 426.
 Justi, E., Oszillographische Untersuchung des Überganges $N \rightleftharpoons S$ von polykristallinem Sn im variablen Magnetfeld 42, 84.
 Jusuf, M., Über die Ionisierung von Ortho- und Parawasserstoff durch Protonen- und Deuteronen-Kanalstrahlen 41, 435.

K

- Kappler, Eugen, Die Sichtbarmachung von Dichteschwankungen 42, 216.
 Kast, W. vgl. Becherer, G. 41, 355.
 Kohler, Max, Bemerkungen zum Vorzeichen der transversalen thermomagnetischen Effekte im Falle des freien Elektronengases. Der transversale Thomson-Effekt in anisotropen Metallen und die analogen Erscheinungen im Magnetfeld 41, 54. — Die elektrischen und thermischen Eigenschaften von Metallen im Magnetfeld 42, 142.
 Kossel, W. u. Möllenstedt, G., Dynamische Anomalie von Elektroneninterferenzen 42, 287. — Berichtigung zu vorstehender Arbeit 42, 508.
 Kurzke, H. u. Rottgardt, J., Über die Entfärbung von Alkalihalogenidkristalliten. II. Entfärbungsuntersuchungen an mikrokristallinen durch Kathodenstrahlen verfärbten Schichten 41, 584.

L

- von Laue, M., Eine Ausgestaltung der Londonischen Theorie der Supraleitung 42, 65.
 Lauterjung, K.-Heinz, Über den Wirkungsquerschnitt einiger Elemente für langsame Neutronen 41, 177.
 Ledinegg, E., Über die allgemeinste Lösung der Maxwell'schen Gleichungen in abgeschlossenen zylindrischen Räumen 41, 537.
 Lenard, Philipp, Bildnis 41, 324.
 Lettowsky, F., Bemerkung zur Arbeit O. Schrievers: „Angleichung der elektromagnetischen Reflexions- und Brechungstheorie an die physikalischen Vorgänge“ 42, 63.

M

- Marx, Helmut, Zur Theorie der Zylinder- und Kugelwellen in reibungsfreien Gasen und Flüssigkeiten 41, 61.
 Meißner, Walther, Bildnis 42, 65.
 Meixner, J., Reversible Bewegungen von Flüssigkeiten und Gasen 41, 409.
 Meyer-Eppler, W., Verzerrungen, die durch die endliche Durchlaßbreite physikalischer Apparate hervorgerufen werden, nebst Anwendung auf die Periodenforschung 41, 261.
 Miess, A. vgl. Neumann, K. 41, 319.
 Möllenstedt, G. vgl. Kossel, W. 42, 287, 508.

- Müller, Wilhelm, Über die Drehung zweier Zylinder in einer zähen Flüssigkeit und die Theorie der Kräfte am Rotations-Viskosimeter mit exzentrischen Zylindern 41, 335. — Zur Berechnung der Kräfte an zylindrischen Leitern in ebenen elektrostatischen und elektromagnetischen Feldern 42, 609.

N

- Neugebauer, Th., Berechnung der Lichtzerstreuung von Fadenkettenlösungen 42, 509.
 Neumann, K. u. Miess, A., Zur Theorie der Keimbildung in Lösungen 41, 319.

O

- Ott, H., Reflexion und Brechung von Kugelwellen; Effekte 2. Ordnung 41, 443.

P

- Passoth, G., Über den Einstellvorgang eines „Doppelgalvanometers“ 42, 35. — Über die Meßgrenze bei Benutzung eines Doppelgalvanometers 42, 49.
 Peters, Cl. vgl. Brill, R. 41, 37, 233; 42, 357.
 Planck, Max, zum 85. Geburtstag 42, 421.
 Poevertlein, H., Durchgang langsamer Kaliumionen durch Gase von niederem Druck 42, 1.
 Rating, W. vgl. Schäfer, Klaus 42, 176.
 Rawer, Karl, Berichtigung zur Arbeit „Elektrische Wellen in einem geschichteten Medium“ (Ann. d. Phys. [5] 35. S. 385. 1939) 42, 294.
 Renner, F. vgl. Sommerfeld, A. 41, 1.
 Riezler, Wolfgang, Der Wirkungsquerschnitt von Krypton und Xenon gegenüber langsamen Neutronen 41, 193. — Absorption von C-Neutronen in seltenen Erden 41, 476. — Untersuchungen zur Neutronenabsorption der seltenen Erden mit hohem Einfangsquerschnitt 42, 468.
 Rottgardt, J. vgl. Kurzke, H. 41, 584.
 Rüdiger, O. u. Schlechtweg, H., Über den Einfluß der magnetoelastischen Energie auf das Asymptotengesetz der Magnetostriktion und der Magnetisierungskurve des Eisens. II 41, 144. — Die Magnetostriktion und die Magnetisierung des Eisens in hohen Magnetfeldern unter Berück-

sichtigung der wahren Magnetisierung. III 41, 151.

Rüfer, W., Absorptionsmessungen von Ultraschallwellen in elektrolytisch leitenden Lösungen 41, 301.

S

Saur, E., Experimentelle Untersuchungen über die Feinstruktur der Röntgenabsorptionskanten. I. Die Feinstruktur der Ti-K-Absorptionskante von Titan und einfachen Titanverbindungen 42, 223. — II. Die Feinstruktur der V-K-Absorptionskante von Vanadin und einfachen Vanadinverbindungen 42, 348.

Sauter, Fritz, Zur Theorie der metallischen Elektrizitätsleitung 42, 110.

Seemann, H., Die Quartiken auf den Regelflächen der Raumgitterinterferenzen. Entgegnung auf die Bemerkungen des Herrn Wilhelm Maier (Bernau a. Chiemsee), in Ann. d. Phys. (5) 40. S. 85—120. 1941 41, 313.

Sommerfeld, A. u. Renner, F., Strahlungsenergie und Erdabsorption bei Dipolantennen 41, 1.

Sommerfeld, A., Die freischwingende Kolbenmembran 42, 389.

Székely, Angelika u. Zauner, Edith, Sondenmessungen in verdünnter, durch einen Elektronenstrahl ionisierter Luft 41, 225.

Sch

Schäfer, Klaus, Rating, W. u. Eucken, A., Über den Einfluß des gehemmten Austauschs der Translations- und Schwingungsenergie auf das Wärmeleitvermögen der Gase 42, 176.

Schaper, Ilsemarie vgl. Becker, A. 42, 297 u. 487.

Scheffers, H., Vereinfachte Ableitung der Formeln für die Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen 42, 211.

Schlechtweg, H. vgl. Rüdiger, O., II 41, 144; III 41, 151.

Schmittthener, Fred., Eine Anodenkanalquelle für positive Trägerstrahlen 42, 273.

Schneider, Peter, Beitrag zur vollständigen Lösung der Differentialgleichung freier gekoppelter Schwingungen für beliebige Dämpfung sowie Art und Größe der Kopplung 41, 211.

Schöls, G., Über Kennlinien eines gesteuerten Vakuumbogens 42, 477.

Schriever, O., Berichtigung zum Aufsatz „Angleichung der elektromagnetischen Reflexions- und Brechungstheorie an die physikalischen Vorgänge“ (O. Schriever, Ann. d. Phys. [5] 40. S. 448. 1941) 41, 324.

St

Stehberger, K. H., Versuch über die elektrostatische Abstoßung paralleler Elektronenstrahlen 41, 325.

Steiner, K. u. Gerschlauser, W., Versuche zur Silbeeschen Hypothese 42, 98.

Stenzel, H., Über die Berechnung des Schallfeldes unmittelbar vor einer kreisförmigen Kolbenmembran 41, 245.

V

Vogel, B., Kontinuierliche Emissionsspektren der Edelgase 41, 196.

Vogt, E. u. Harms, B., Zum Diamagnetismus in metallischen Mischkristallreihen VI. Suszeptibilität und elektrischer Widerstand der kupferreichen Kupfer-Aluminium-Mischkristalle 42, 501.

Voth, Gerhard, Die Intensitätsverhältnisse der K-Serienlinien bei den Schweren Elementen Re (75) bis Pb (82) 41, 375.

W

Wecker, Fritz, Röntgenographische Strukturuntersuchung an Zinksulfid-Kupfer-Phosphoren nach der Pulvermethode 42, 561.

Wehner, Gottfried, Sondenuntersuchungen am stabilisierten Quecksilberdampfbogen 41, 501.

Wolf, Franz, Elektrostatische Aufladung als Problem der Metallelektronik 41, 103.

Z

Zauner, Edith vgl. Székely, Angelika 41, 225.



Die Oxydkathode

Von Dr.-Ing. G. HERRMANN, Berlin, und Dr. phil. S. WAGENER, Berlin.

1. Teil: **Physikalische Grundlagen.** Von Dr. phil. S. WAGENER. VIII, 124 Seiten mit 72 Abbildungen i. T. 1943. gr. 8°. RM. 12.75

Das Buch gibt einen Gesamtüberblick über Technik und Physik der Oxydkathode. Es soll damit eine Lücke ausfüllen, die angesichts der großen technischen Bedeutung dieser Elektronenquelle besonders fühlbar war. Als eine der physikalischen Grundlagen werden zunächst die allgemeinen Gesetze der thermischen Elektronenemission der reinen Metalle abgeleitet, sowie daran anschließend die verschiedenen Gesetzmäßigkeiten des Elektronenüberganges im Vakuum unter besonderer Berücksichtigung der Elektronenaustrittsarbeiten behandelt. Nach der Untersuchung des Einflusses von adsorbierten Fremdstoffschichten auf die Austrittsarbeit und die Elektronenemission ist ein besonderer Abschnitt den verschiedenen experimentellen Verfahren zur Bestimmung der Austrittsarbeit gewidmet. Da die Emissionsschicht einer Oxydkathode eine sogenannte „halbleitende“ chemische Verbindung ist, werden schließlich die für diese Verbindung gültigen physikalischen Gesetzmäßigkeiten der Elektronen- und Ionenleitung sowie der damit eng zusammenhängenden Diffusionserscheinungen aufgestellt.

2. Teil: **Technik und Physik.** Von Dr.-Ing. G. HERRMANN und Dr. phil. S. WAGENER erscheint im Laufe des Jahres 1943.

JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Franz Schmidt & Haensch · Berlin

Polarisationsapparate

Spektralapparate

Photometer



Schaltschemata und Differentialgleichungen

elektrischer und mechanischer Schwingungsgebilde

Von Dr. HEINRICH HECHT, Kiel. VI, 125 Seiten mit 51 Abbildungen im Text. 1939. gr. 8°. RM. 9.60

Elektrotechnik und Maschinenbau: Wie der Verfasser im Vorwort bemerkt, ist dieses Buch auf Grund jahrzehntelanger Beschäftigung mit der Entwicklung, dem Bau und der experimentellen Untersuchung elektroakustischer Apparate entstanden. Demgemäß behandelt das Buch die wichtigsten Probleme, auf welche der Verfasser im Laufe der Jahre auf Grund seiner praktischen Tätigkeit gestoßen ist. In besonders klarer Weise werden Analogiebetrachtungen zwischen mechanischen und elektrischen Schwingungen aufgestellt, und es werden für kompliziertere Anordnungen von mechanischen Schwingungsgebilden Schaltschemata entworfen, ähnlich wie es in der Elektrotechnik üblich ist. Das überaus klar geschriebene Buch beginnt mit der Besprechung der einfachsten Fälle und wendet sich dann immer schwierigeren Aufgaben zu, so daß es möglich ist, sich auch mit verhältnismäßig geringen Vorkenntnissen auf diesem Gebiet gut einzuarbeiten. Das Buch stellt eine willkommene Bereicherung dar und kann dem Ingenieur und Physiker auf das beste empfohlen werden.

JOHANN AMBROSIOUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechtes der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

Bezugspreis je Band zu 8 Heften, die zwanglos ausgegeben werden RM. 26.—. Porto: Inland RM. 1.20; Ausland RM. 2.—. Vorzugspreis für Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft und der Gesellschaft für technische Physik je Band RM. 20.80. Einzelpreis dieses Heftes RM. 8.—.

Die Zeitschrift kann durch jede Buchhandlung, in Ausnahmefällen auch durch den Verlag bezogen werden.

Die Redaktion der Annalen wird von den auf der Titelseite genannten Herren besorgt. Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn *Geh.-Rat Prof. Dr. E. Gränelen, Marburg/L., Mainzer Gasse 33*, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte *druckfertig* einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten. Die *Zeichnungen* sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Bei den *Zitaten* wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, das jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.
